Recette géométrique des beignets

Problématique : Comment prouver l'existence des cercles de Villarceau ?
Possèdent-ils des propriétés remarquables ? Comment les mettre en évidence ou les construire ?

Table des matières

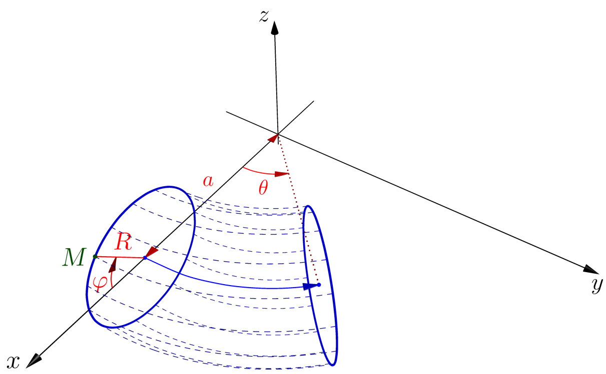
1 Préliminaires

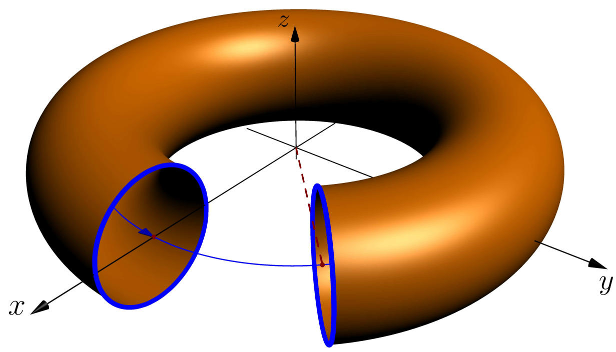
1.1 Construction du tore de $\mathbb{R}^3$

Définition : *Un tore est la surface* $\sum_{a,R}$ *engendrée par la rotation d'un cercle* C *de rayon* R *autour d'une droite affine située dans son plan à une distance* a *de son centre. On prendra* $R < a$.

Cercle bleu : $\varphi \mapsto \begin{pmatrix} a + R\cos\varphi \\ 0 \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$. Par rotation : $(\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + R\cos\varphi \\ 0 \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$.

Donc $\sum_{a,R}$ paramétré par $(\varphi, \theta) \longmapsto M = O + (a + R\cos\varphi)\vec{u} + R\sin\varphi\vec{k}$ où $\begin{cases} \vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{v} = \sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j} \end{cases}$.





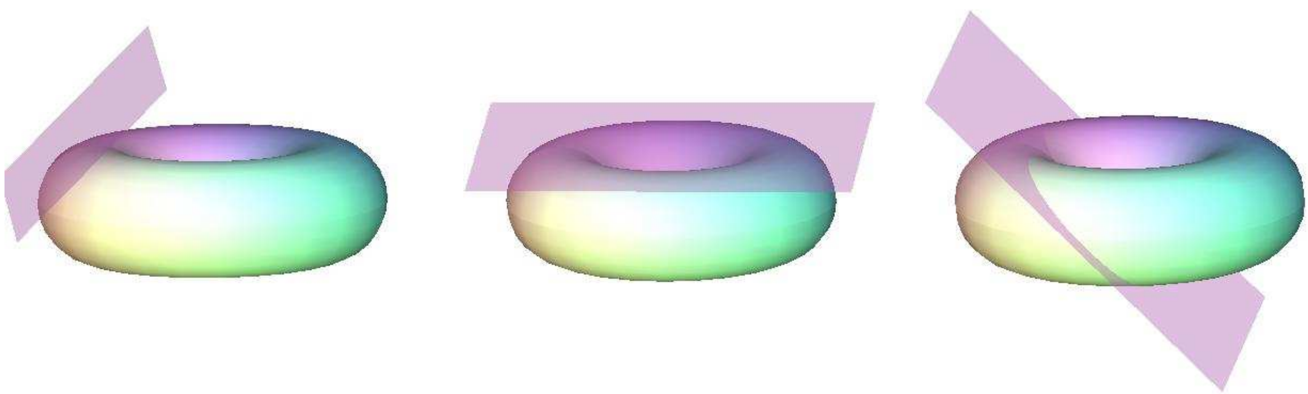
1.2 Plan tangent

$$T_m : \underbrace{X\cos\varphi_0 + Z\sin\varphi_0 - (a\cos\varphi_0 + r)}_{\Phi(X,Y,Z)} = 0$$

$$F(\varphi,\theta) = \Phi(x(\varphi,\theta), y(\varphi,\theta), z(\varphi,\theta)) = \underbrace{(a + R\cos\varphi)\cos\theta}_{x(\varphi,\theta)}\cos\varphi_0 + \underbrace{R\sin\varphi}_{z(\varphi,\theta)}\sin\varphi_0 - (a\cos\varphi_0 + R)$$

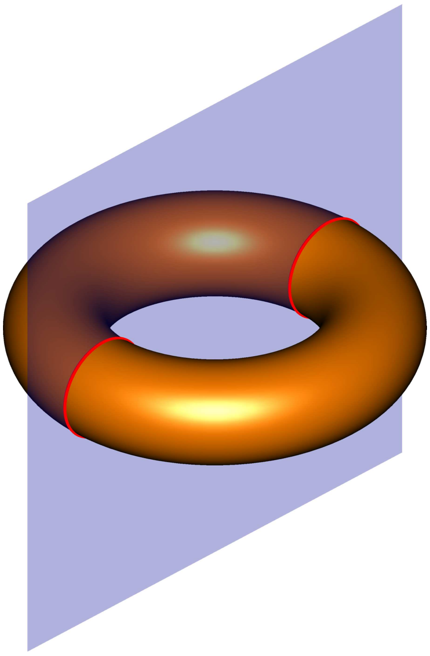
$$\rho\tau - \sigma^2 = R\cos\varphi_0(a + R\cos\varphi_0)$$

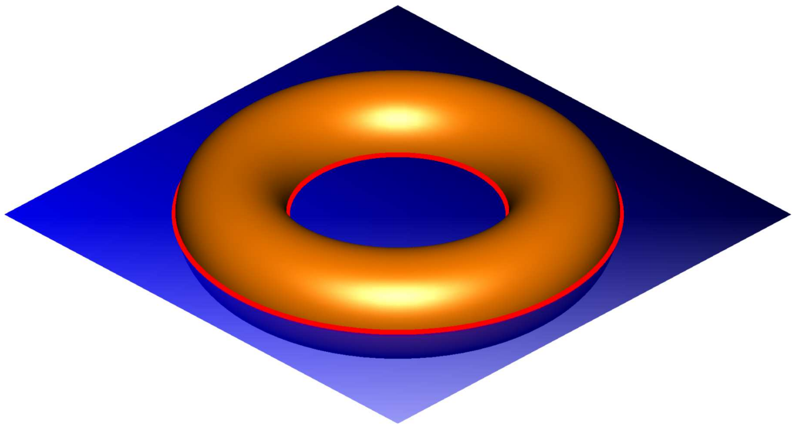
$-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$: points *elliptiques*, $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$: points *paraboliques*, $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2}$: points *hyperboliques*.



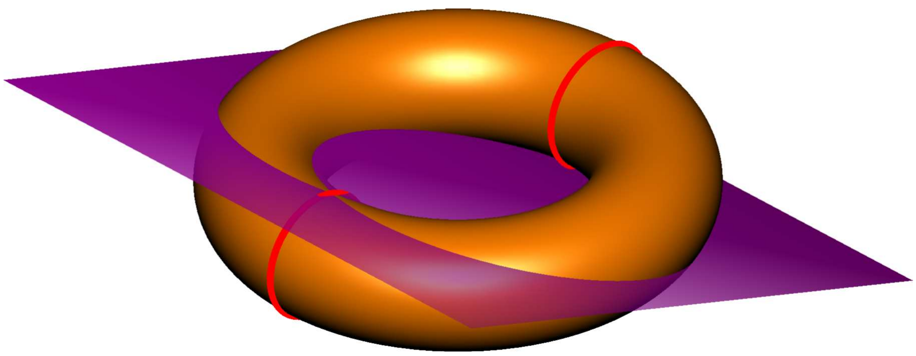
2 Etude analytique des cercles de Villarceau

2.1 Présentation du problème

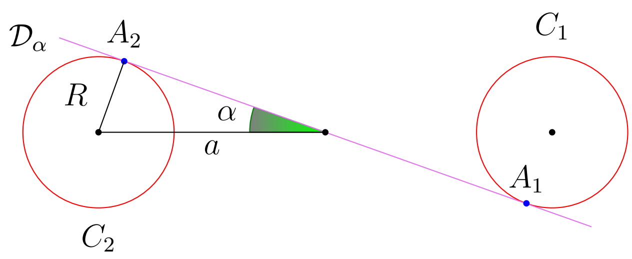




2.2 Plan bitangent



Dans le plan $x = 0$:



$$\begin{cases} \alpha = \arcsin\left(\frac{R}{a}\right) \\ \mathcal{P}_\alpha : z = \tan(\alpha) y \end{cases} \qquad \begin{cases} (y-a)^2 + z^2 = R^2 \ (C_1) \\ (y+a)^2 + z^2 = R^2 \ (C_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1(a\cos^2\alpha, a\sin\alpha) \\ A_2(-a\cos^2\alpha, -a\sin\alpha\ \cos\alpha) \end{cases} \quad \text{dans } (O;\vec{j},\vec{k})$$

2.3 Equation des cercles

▸ $\mathcal{P}_\alpha$ munit du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \sin\alpha\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k})$.

$M(x,y,z) \in \mathcal{P}_\alpha$ dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \iff (x, \frac{y}{\cos\alpha})$ dans $\mathcal{R}$; en effet:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + y\tan\alpha\,\vec{k} = x\vec{i} + \frac{y}{\cos\alpha}(\sin\alpha\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k})$$

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R} &\iff \left\{\begin{array}{l} z = y\tan\alpha \\ (x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2) \end{array}\right. \\
&\iff (X^2+Y^2+a^2-R^2)^2 = 4a^2(X^2+Y^2\cos^2\alpha) \\
&\iff (X^2+Y^2)^2 - 2(a^2+R^2)X^2 + 2(a^2-R^2-2a^2\cos^2\alpha)Y^2 + (a^2-R^2)^2 = 0 \\
&\iff (X^2+Y^2)^2 - 2(a^2+R^2)X^2 + 2(-a^2+R^2)Y^2 + (a^2-R^2)^2 = 0 \\
&\iff (X^2+Y^2+uX+vY+w)(X^2+Y^2+u'X+v'Y+w') = 0
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R} \text{ est la réunion dans } \mathcal{R} \text{ de } (X-R)^2+Y^2=a^2 \text{ et } (X+R)^2+Y^2=a^2$$

▸ Paramétrisation des cercles de Villarceau :

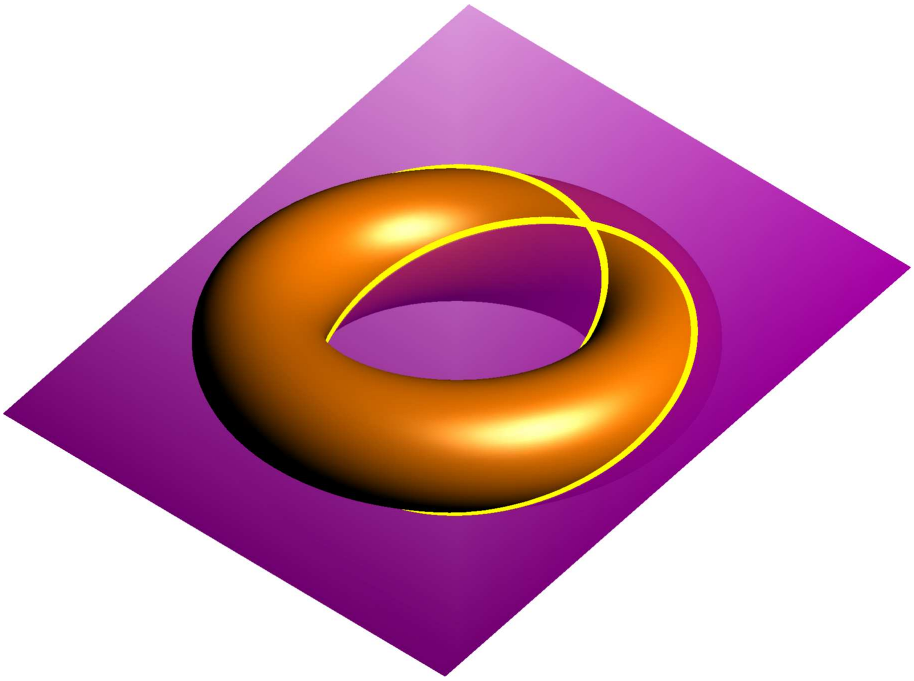
Celle du tore : $\left\{\begin{array}{l} x = (a+R\cos\varphi)\sin\theta \\ y = (a+R\cos\varphi)\cos\theta \\ z = R\sin\varphi \end{array}\right.$ et l'équation du plan $z = \tan\alpha y \Leftrightarrow z = \frac{R}{\sqrt{a^2-R^2}}y$, d'où :

$$R\sin\varphi\sqrt{a^2-R^2} - R(a+R\cos\varphi)\cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-R^2}\sin\varphi}{a+R\cos\varphi}$$

$$\sin\theta = \varepsilon\sqrt{1-\cos^2\theta} = \varepsilon\sqrt{\frac{(a+R\cos\varphi)^2-(a^2-R^2)\sin^2\varphi}{(a+R\cos\varphi)^2}} = \varepsilon\frac{a\cos\varphi+R}{a+R\cos\varphi}$$

$$\gamma_\varepsilon(\varphi) = \left\{\begin{array}{l} x = \varepsilon(a\cos\varphi+R) \\ y = \sqrt{a^2-R^2}\sin\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{array}\right.$$

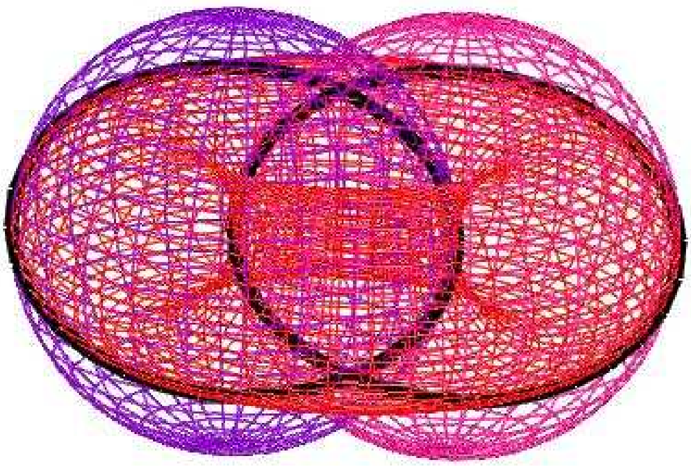
2.4 Représentation dans l'espace



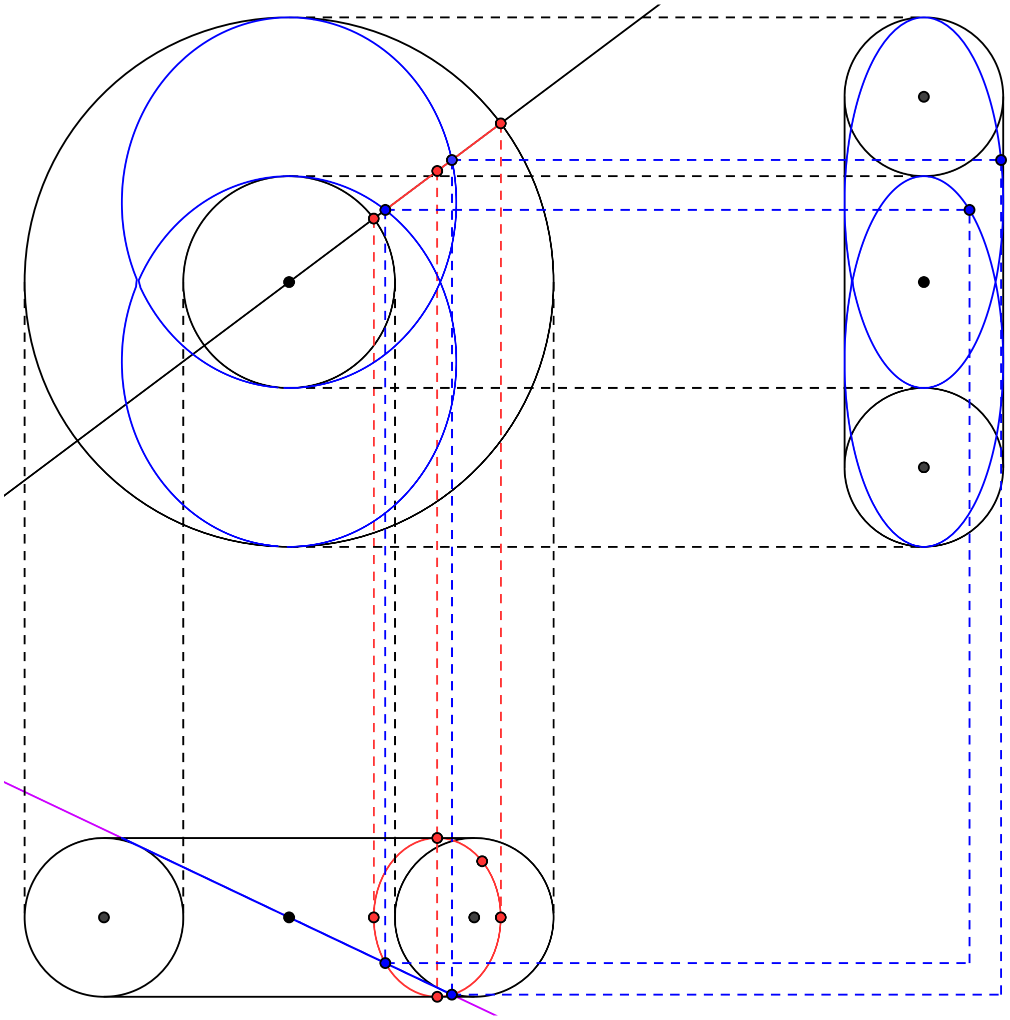
☞ Intersection du tore avec les sphères de centres $\Omega_\varepsilon(\varepsilon R, 0, 0)$ et de rayon a.

En effet γ_ε appartient bien à ces shères :

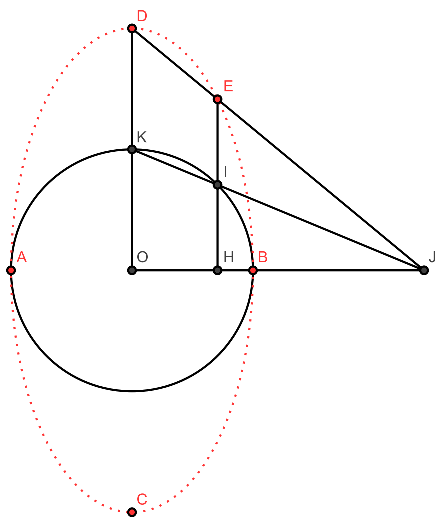
$$\Omega_\varepsilon\gamma_\varepsilon(\varphi)^2 = a^2\cos^2\varphi + (a^2 - R^2)\sin^2\varphi + R^2\sin^2\varphi^2 = a^2$$



3 Construction d'une épure



☞ *Comment obtenir le cinquième point ?*



4 Démonstration algébrique

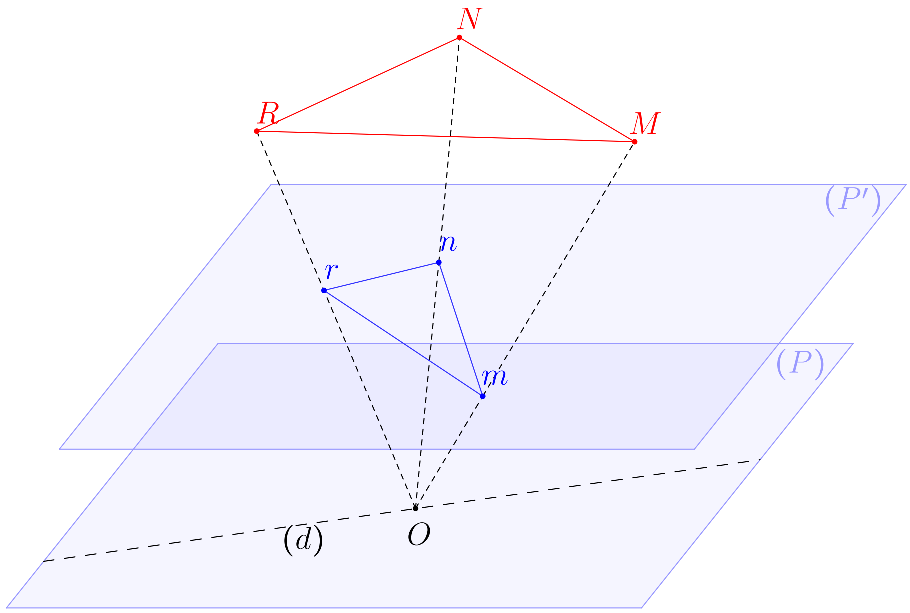
4.1 Espace projectif

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. On définit sur $E-\{0\}$ la relation :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{K}^*, x = \lambda y$$

*L'**espace projectif** sur E est l'ensemble quotient de $E-\{0\}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.*

Exemple : l'espace projectif de $\mathbb{R}^3$.



☞ On se place dans l'espace projectif complexe quotient de $\mathbb{C}^4-\{(0,0,0,0)\}$ par $\mathcal{R}$. On l'identifie à $\mathbb{C}^3$ (en associant à (x,y,z) la classe d'équivalence $(x,y,z,1)$), complété par un plan à l'infini ensemble des classes d'équivalence des vecteurs de la forme $(X,Y,Z,0)$.

4.2 Points cycliques

Définition : *Les **points cycliques** d'un plan sont les points à l'infini de tous ses cercles.*

Propriété n°1 : *Les coordonnées (projectives) des points cycliques sont $(1,i,0)$ et $(1,-i,0)$.*

Preuve : $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$. $x = \frac{X}{Z}$ et $y = \frac{Y}{Z}$: $(X-aZ)^2+(Y-aZ)^2 = R^2Z^2$.

Définition : *L'ensemble de tous les points cycliques de tous les plans est l'ombilicale.*

Propriété n°2 : *L'ombilicale est la courbe du plan à l'infini d'équation $X^2+Y^2+Z^2 = 0$ (et $T = 0$).*

Preuve : De même $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2 \Rightarrow (X-aT)^2+(Y-bT)^2+(Z-aT)^2 = R^2T^2$.

Propriété n°3 : *L'intersection d'un tore avec le plan à l'infini est l'ombilicale (comptée 2 fois).*

Preuve : On homogénéise et on obtient $(X^2+Y^2+Z^2+(a^2-R^2)T^2)^2-4a^2T^2(X^2+Y^2)=0$.

Propriété n°4 : *L'intersection d'un plan tangent en un point régulier à une surface algébrique et de cette surface est une courbe algébrique de même degré que la surface, admettant un point double au point de tangence.*

Théorème de Bézout : *L'intersection de deux courbes algébriques de degrés m et n (n'ayant pas de composante commune) se fait en mn points (en comptant les multiplicités).*

4.3 Preuve du théorème de Villarceau

Théorème : *L'intersection d'un tore avec un plan bitangent est la réunion de deux cercles.*

Preuve : ▸ *L'intersection est une quartique admettant quatre points doubles.*

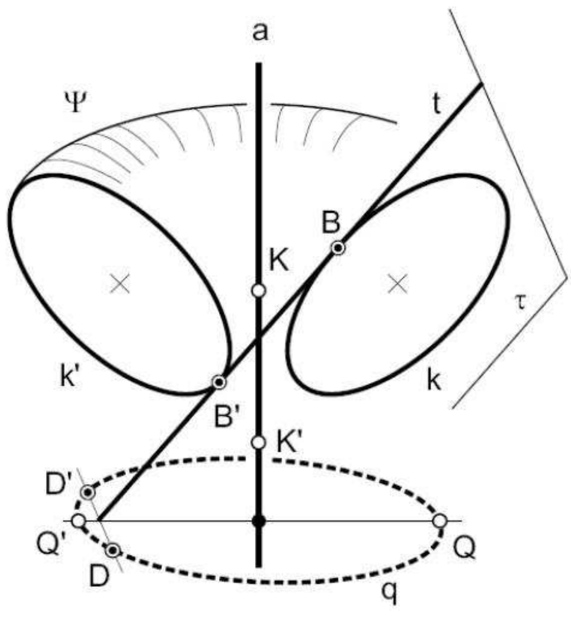
▷ 2 points doubles réels d'après la **propriété n°4**.
▷ 2 points cycliques issue de l'intersection du plan bitangent (projectif) avec le tore (projectif).

▸ *Une quartique admettant quatre points doubles est la réunion de deux coniques.*

▷ M_1, M_2, M_3, M_4 les 4 points doubles sus-cités. $M_5 \in \mathcal{Q}$. $\mathcal{C}$ conique passant par ces cinq points. Tenant compte des multiplicités cela signifie que $\mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$ contient au moins 9 points donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$.
▷ On recommence avec un point $M_5' \in \mathcal{Q} \backslash \mathcal{C}$ et une conique $\mathcal{C}'$ passant par ces points.

▸ *Une conique passant par les points cycliques est un cercle.*

▷ $aX^2+bXY+cY^2+dXZ+eYZ+fZ^2=0$ puis on $Z=0$ on obtient : $aX^2+bXY+cY^2=0$.



5 Loxodromie du tore

Définition : *les **loxodromies** d'une surface sont les courbes $\mathcal{C}^1$ tracées sur celle-ci, qui coupent les parallèles selon un angle constant,* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{G}(\theta) = \overrightarrow{F}(\theta, \varphi(\theta))$.

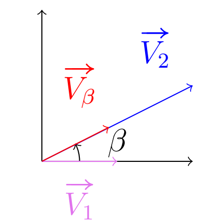
5.1 Mise en équation

- Un vecteur tangent à la courbe $\overrightarrow{G}(\theta)$ est : $\dfrac{\overrightarrow{dG}}{d\theta} = (a + R\cos\varphi)\vec{v}(\theta) + \dfrac{d\varphi}{d\theta}(-R\sin\varphi\,\vec{u}(\theta) + R\cos\varphi\,\vec{k})$.
- Un vecteur tangent au parallèle de $\Sigma_{a,R}$ passant par M est: $(a + R\cos\varphi)\vec{v}(\theta)$.

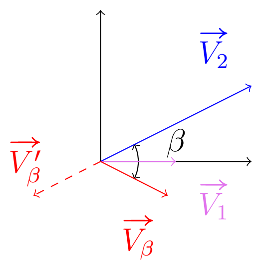
La base $(\vec{v}(\theta), -\sin\varphi\,\vec{u}(\theta) + \cos\varphi\,\vec{k})$ est orthonormée, dans celle-ci :

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} a + R\cos(\theta) \\ R\frac{d\varphi}{d\theta} \end{pmatrix}$$

On veut que $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = \beta$. Posons $\overrightarrow{V_\beta} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_\beta'} = \begin{pmatrix} -\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$. Deux situations possibles :



$$\det(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a + R\cos\theta & \cos\beta \\ R\frac{d\varphi}{d\theta} & \sin\beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a + R\cos\theta)\sin\beta = R\frac{d\varphi}{d\theta}\cos\beta$$



$$\det(\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_\beta'}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a + R\cos\theta & \cos\beta \\ R\frac{d\varphi}{d\theta} & \sin\beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a + R\cos\theta)\sin\beta = -R\frac{d\varphi}{d\theta}\cos\beta$$

$$(a + R\cos\varphi)^2 \sin^2\beta = \left(R\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 \cos^2\beta$$

$$\cos^2\beta \sin^2\alpha \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = \sin^2\beta(1 + \sin\alpha\cos\varphi)^2$$

5.2 Résolution

▸ Choix : $\beta = \alpha$.

$$\cos\alpha \frac{d\varphi}{d\theta} = (1 + \sin\alpha\cos\varphi)$$

Changement de variable $t = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)d\varphi$ on a :

$$\int \cos\alpha \,\frac{d\varphi}{1+\sin\alpha\,\cos\varphi} = 2\mathrm{Arctan}\left(t\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)$$

$$\theta = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\tan\frac{\varphi}{2}\right) \text{ puis } \varphi(\theta) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

Un système d'équations paramétriques dans $\mathcal{R}_0$ de L est:

$$\begin{pmatrix} x = (a + R\cos(\varphi(\theta))\,\cos\theta \\ y = (a + R\cos(\varphi(\theta))\,\sin\theta \\ z = R\sin\varphi(\theta) \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} x = \dfrac{a\cos^2\alpha\,\cos\theta}{1-\sin\alpha\,\cos\theta} \\ y = \dfrac{a\cos^2\alpha\,\sin\theta}{1-\sin\alpha\,\cos\theta} \\ z = \dfrac{R\cos\alpha\,\sin\theta}{1-\sin\alpha\,\cos\theta} \end{pmatrix} \quad \text{pour}\,\theta \in]-\pi,\pi]$$

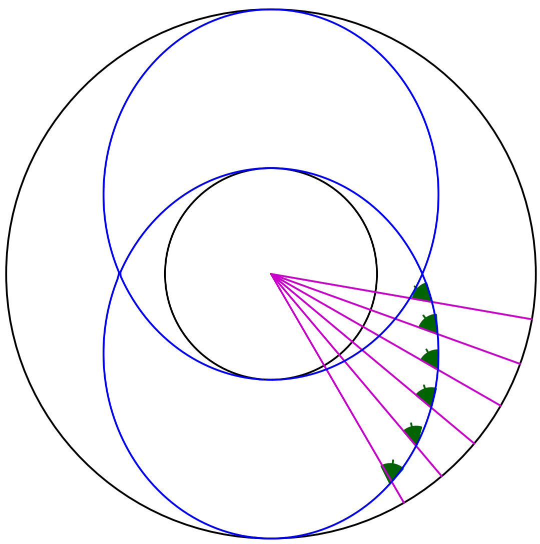
$$r(\theta) = \frac{a\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha\,\cos\theta}$$

▸ pour tout point $M(x,y,z)$ de L, on a $z = y\tan\alpha$.

▸ L est inclus dans $\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R}$.

▸ L est le cercle de $\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R}$ d'équation dans $\mathcal{R}$: $(X-R)^2 + Y^2 = a^2$.

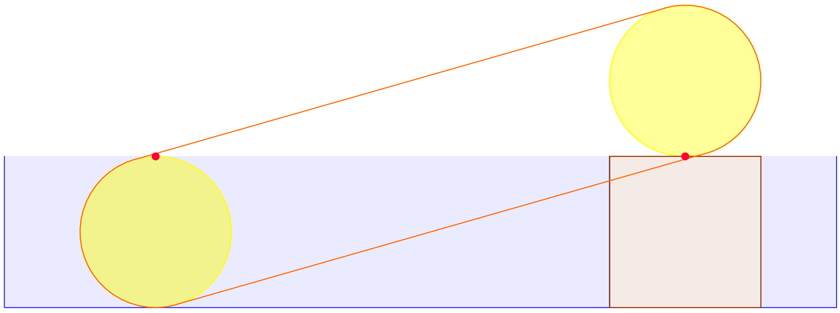
Conclusion : les loxodromies d'angle α sont les **cercles de Villarceau**.



6 Construction réelle des cercles de Villarceau

6.1 Note historique et exemples architecturaux

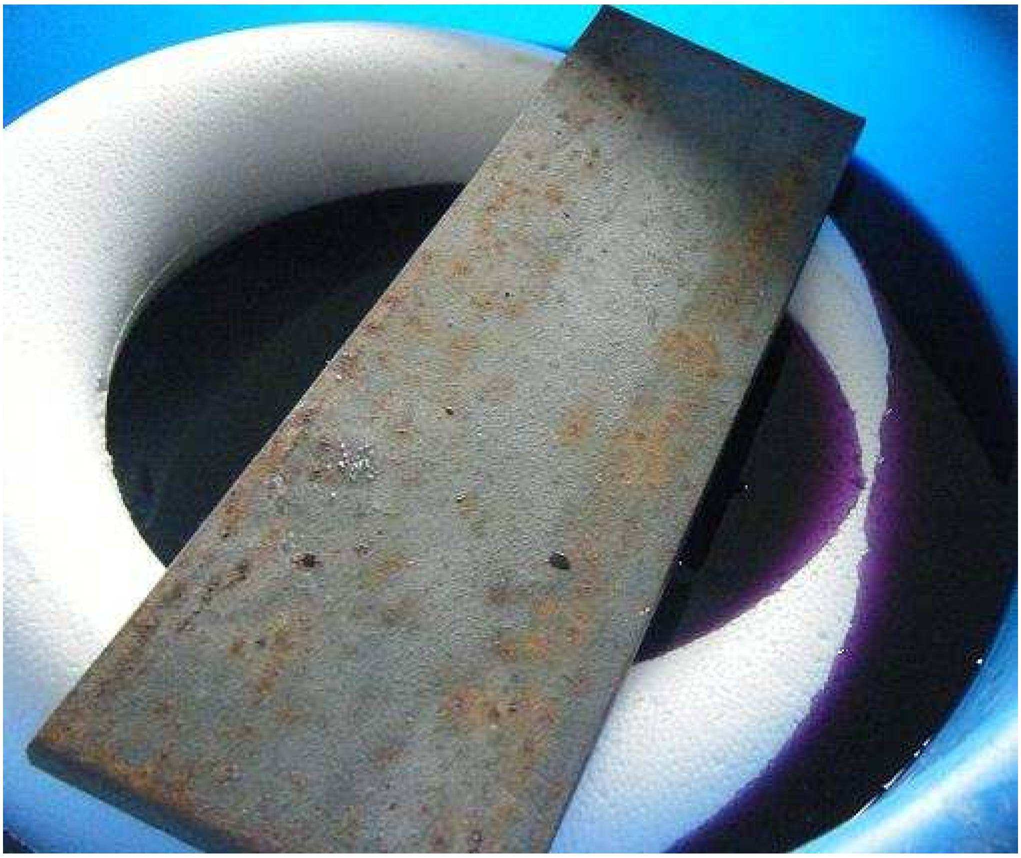
6.2 Réalisation pratique




ROMY

Premier marquage

Second marquage



7 Références

[1] J-D. Eiden, *Géométrie analytique classique*, Calvage et Mounet, 2009.

[2] D. Feldmann, http://denisfeldmann.fr/PDF/cercles.pdf.

[3] M. Berger, http://www.bibnum.education.fr/files/villarceau-analyse.pdf, 2010.

[4] Article Wikipédia, http://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie_projective.

[5] Sujet de concours, *Mathématiques MP II*, TPE, 1996.