LYCEE FABERT - MPSI1

Devoir de Mathématiques n°13 - DH9 - à rendre le vendredi 21/12/2007

Exercice 1 : domination

Soit f de R dans R définie par $f(x) = e^{x^2}(x\cos^2 x + \sin^2 x)$

1°)Montrer que f est strictement croissante au voisinage de $+\infty$

2°)Montrer que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

3°)Soit g définie sur R^+ par $g(x) = \sqrt{x}e^{x^2}$; montrer que, au voisinage de $+\infty$, f n'est pas dominée par g et que g n'est pas dominée par f (on pourra utiliser des suites « bien choisies »)

Exercice 2 : égalité de Taylor-Lagrange

Soit f une application de classe C^n de l'intervalle fermé I d'extrémités a et b ($a\neq b$) dans R , telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur l'intérieur de I. Montrer qu'il existe c élément de l'intérieur de I tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Exercice 3 : convexité

Soit I un intervalle de R et f de I dans R une application continue sur I. Montrer l'équivalence des deux assertions :

(i) f est convexe

(ii) $\forall (x_1,x_2)\in I^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Indication: on pourra s'intéresser aux λ de la forme $\frac{k}{2^n}$

Exercice 4 : développement asymptotique d'une suite de solutions d'équations

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\ln x + nx = 0$ possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) En déduire l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et calculer cette limite.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n = nx_n$. On remarquera qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\quad y_n + \ln y_n = \ln$

4) Montrer l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ et calculer cette limite.

5) Montrer que : $y_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers ∞.

6)a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives de limite ∞ telles que : u_n

Montrer que : $\ln u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln v_n$.

b) En déduire un équivalent de $x_n - \frac{\ln n}{n}$ lorsque n tend vers ∞.

7) Trouver finalement un équivalent de $x_n - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln\ln n}{n}$ lorsque n tend vers ∞.