LYCEE FABERT - MPSI1

Devoir de Mathématiques n°9 - DH7 - à rendre le lundi 26/11/07

Exercice 1 : deux paraboles

Dans le plan affine euclidien, on considère des deux paraboles d'équations $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2qy$; montrer qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans l'une et circonscrits à l'autre.

Exercice 2: sous groupes additifs de R

Un sous groupe (additif) de (R,+) est une ensemble de nombres réels contenant 0 et stable pour l'addition et la symétrisation . Ainsi, une partie G de R est un sous groupe si

(1) $0 \in G$
(2) $\forall (x,y) \in G^2,\ x+y \in G$
(3) $\forall x \in G,\ -x \in G$

Soient A et B deux parties de R . On dit que A est dense dans B lorsque pour tout x dans B et tout ε strictement positif,
$]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing$

L'objet de cet exercice est d'étudier les sous groupes additifs de R. Dans toute la suite, G désigne un tel sous groupe

1°)Formuler une proposition traduisant que G n'est pas discret. Montrer que si G n'est pas discret
$\forall x \in R,\ \forall \alpha > 0,\ G \cap [x, x+\alpha[\neq \varnothing$

2°)Dans cette question, on suppose que G est discret. Il existe donc un réel strictement positif α tel que $G \cap]0,\alpha[$ soit vide. On suppose aussi que G contient un élément non nul.
a)Soit I un intervalle de longueur $\alpha/2$. Montrer que $G \cap I$ contient au plus un élément. Que peut-on en déduire pour l'intersection de G avec un intervalle quelconque de longueur finie ?
b)Montrer que $G \cap R^{+*}$ admet un plus petit élément que l'on notera m
c)Montrer que $G = \{km,\ k \in Z\}$. Un tel ensemble sera noté Zm

3°)Soit x et y deux réels strictement positifs ; on pose :
$X = Zx = \{kx,\ k \in Z\}$, $Y = Zy = \{ky, k \in Z\}$, $S = \{mx+ny,\ (m,n) \in Z^2\}$
a)Vérifier que X,Y et S sont des sous groupes de (R,+). On dira que S est le sous groupe engendré par x et y.
b)Montrer que S est discret si et seulement si x/y est élément de Q

4°)On suppose ici que x/y est irrationnel, soit
$A = \{kx,\ k \in Z^*\}$ $\qquad$ $B = \{ky,\ k \in Z^*\}$
a)Montrer que $A \cap B = \varnothing$
b)Montrer que
$\inf\{|a-b|, (a,b) \in A \times B\} = 0$

5°)En considérant un certain sous-groupe additif, montrer que
$\{\cos(n),\ n \in Z\}$
est dense dans [-1,1]

Exercice 3: fractions continues et densité de Q dans R

On considère un irrationnel positif x et on lui associe la suite (x_n) définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = 1/(x_n - [x_n])$ ([a] est la partie entière de a)

a)Etablir par récurrence que les réels x_n sont irrationnels, et supérieurs à 1 pour n au moins égal à 1

On définit deux suites de nombres entiers par $p_0=1$, $p_1=[x]$ et $q_0=0, q_1=1$ et :
$p_{n+1} = p_n[x_n] + p_{n-1}$ $\qquad$ et $\qquad$ $q_{n+1} = q_n[x_n] + q_{n-1}$

b)Etudier le sens de variation et les limites des deux suites d'entiers p_n et q_n
c)Calculer par récurrence $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}$, et en déduire que p_n/q_n est irréductible
d)Etablir par récurrence la relation suivante pour n au moins égal à 1 : $x = (p_nx_n+p_{n-1})/(q_nx_n+q_{n-1})$
e)Calculer $x - (p_n/q_n)$ et comparer selon la parité de n les nombres réels (p_{n-1}/q_{n-1}), x , (p_n/q_n)
f)Montrer que la suite $\left(\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|\right)$ et décroissante , et montrer que : $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$. En déduire que la suite de rationnels (p_n/q_n) converge vers x
g)Montrer que si p/q est telle que $\left|x-\frac{p}{q}\right| < \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|$ avec $p>p_n$ et $q>q_n$

On pourra établir ceci en remarquant qu'alors p/q est compris entre p_{n-1}/q_{n-1} et p_n/q_n
(les rationnels p_n/q_n sont les meilleurs approximations de x, car tout autre rationnel donnant une meilleure approximation a un numérateur et un dénominateur plus grands)