LYCEE FABERT - MPSI1

Devoir de Mathématiques n°8 - DH6 - à rendre le je udi 08/11/07

Exercice 1 : algorithmique

1°)Soit un tableau de n nombres entiers rangés par ordre croissant. Insérer un nombre quelconque à la place qui lui revient.
2°)Créer dans un tableau à 2 dimensions les n premi ères lignes du triangle de Pascal

Exercice 2:

Traiter D7 – DS2 – Exercice 6 – 2°)3°)

Problème

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, par (C) le cercle centré en O et de rayon R, R>0 , et par A_1,A_2 et A_3 les points de coordonnées respectives (R,0), (0,R) et (-R,0)
On désigne par (E) la courbe d'équation : $4x^2 + 5y^2 - 4Ry = 0$

1°)Montrer que (E) est une ellipse. En déterminer deux axes de symétrie et un centre de symétrie.

2°)Etudier le signe de l'expression : $(4x^2 + 5y^2 - 4Ry) - 4(x^2+y^2-R^2)$ pour (x,y) élément de $\mathbb{R}^2$. En déduire les positions relatives de (E) et (C)

3°)a)Soit ($\mathcal{E}$)l'ellipse de représentation paramétrique (x = a cos(θ), y = bsin(θ)), où a et b sont deux réels non nuls et où le paramètre θ décrit R. Montrer que la droite (D) d'équation y = mx + m' rencontre ($\mathcal{E}$)en un point unique si et seulement si il existe x réel tel que

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+m')^2}{b^2}=1 \\ \frac{x}{a^2}+m\frac{mx+m'}{b^2}=0 \end{cases}$$

En déduire que, dans ce cas, (D) est tangente à ($\mathcal{E}$)

b)En se ramenant à la question précédente, montrer que, si dans $\mathcal{P}$ une droite coupe une ellipse en un seul point, elle lui est tangente. Est-ce encore le cas pour une parabole ? Pour une hyperbole ?

c)Montrer que les droites d'équation x+y=R et –x+y=R sont tangentes à (E) en des points que l'on précisera. Tracer soigneusement (C) et (E), ainsi que ces deux droites.

4°)On considère l'arc paramétré défini par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i}+\frac{2t}{1+t^2}\vec{j}\right) \text{ avec t réel}$$

Montrer que l'on définit ainsi une bijection de R sur une partie (γ) de (C) que l'on précisera. Si t est réel, on dira que t est le paramètre du point M(t)

5°)Soit t et u deux réels. Montrer que (1-p)x + sy – R(1+p) = 0 est une équation de la droite (M(t)M(u)), si l'on a posé s=t+u et p=tu
Si t=u, la notation (M(t)M(u)) désignera cette fois la tangente en M(t) à (γ). On admettra sans le vérifier que l'équation trouvée convient encore dans ce cas.

6°)a)Soit M un point de (γ) de paramètre t. Montrer que, sauf dans un cas particulier à préciser, son symétrique orthogonal $\hat{M}$ par rapport à $(0, \vec{j})$ est un point de (γ) ; en préciser le paramètre noté $\hat{t}$

Si A_0 désigne le point de coordonnées (R,2R), montrer que lorsque t est différent de 1, la droite ($A_0\hat{M}$) recoupe (γ) au point de paramètre $\frac{1}{1-t}$ (on pourra utiliser les résultats de 5°)

b)Dans le cas particulier où t est différent de 1 et $u=\frac{1}{1-t}$, on pose toujours s=t+u et p=tu. Montrer que la droite (M(t)M(u)) est tangente à (E) (on pourra exprimer (p+1)s en fonction de p seulement et utiliser les résultats de 3°)b)

c)En utilisant les questions qui précèdent, montrer que, si un point A de (C) est distinct des points A_1,A_2 et A_3 définis dans le préambule, alors une construction géométrique simple, que l'on détaillera, permet de construire deux autres points A' et A'' de (C) tels que les côtés du triangle AA'A'' soient tangents à (E). Etudier le cas des points A_i pour i élément de {1,2,3}

7°)Récapituler les résultats de cette partie à l'ai de d'une figure.