Devoir de Mathématiques n°6 - DH5 - à rendre le lundi 22/10/07

Exercice 1 : faisceaux linéaires de plans

L'espace affine euclidien est muni d'un repère orthonormé. Soient P (ax+by+cz+d=0) et P'(a'x+b'y+c'z+d'=0) deux plans distincts.
On appelle faisceau linéaire de plans défini par P et P' l'ensemble $F_{P,P'}$ des plans Π d'équation

$$\alpha(ax+by+cz+d) + \alpha'(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

lorsque (α,α') décrit R^2 et $(\alpha a+\alpha' a',\alpha b+\alpha' b',\alpha c+\alpha' c')$ différent de (0,0,0)

1°)Montrer que $F_{P,P'}$ ne dépend pas du choix des équations de P et P'

2°)On considère l'ensemble $F'_{P,P'}$ des plans Π' d'équation

$$(ax+by+cz+d) + \lambda(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

lorsque λ décrit R et $(a+\lambda a',b+\lambda b',c+\lambda c')$ différent de (0,0,0)
Montrer que $F_{P,P'}$ contient P et P' et que : $F'_{P,P'} = F_{P,P'} - \{P'\}$

3°)On suppose ici que P et P' se coupent suivant une droite D_0. Montrer que $F_{P,P'}$ est l'ensemble des plans contenant D_0
Exemple : former une équation cartésienne du plan Π passant par A(1,-1,2) et contenant la droite

$$D\begin{cases} x-y+z-5=0 \\ 2x+y+z-2=0 \end{cases}$$

4°)On suppose ici que P et P' sont parallèles. Montrer que $F_{P,P'}$ est l'ensemble des plans parallèles à P (et à P')

Exercice 2: puissance d'un point par rapport à un cercle, faisceau de cercles

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, on note C(A,R) le cercle de centre a et de rayon R

1°)On considère une sécante passant par un point M et coupant le cercle C(A,R) en deux points (éventuellement confondus) P et Q. Montrer que le produit scalaire des vecteurs $\vec{MP}$ et $\vec{MQ}$ est égal, pour toute sécante, à $P_C(M) = MA^2 - R^2$. On dit que $P_C(M)$ est la puissance du point M par rapport au cercle C(A,R)

2°)On considère deux cercles $C_1 = C(A_1,R_1)$ et $C_2 = C(A_2,R_2)$ avec A_1 et A_2 distincts. Montrer que l'ensemble D des points M tels que $P_{C1} = P_{C2}$ est une droite orthogonale à A_1A_2 appelée axe radical des cercles C_1 et C_2

3°)Montrer, dans le repère orthonormé dont l'axe Ox est A_1A_2 et dont l'axe Oy est l'axe radical Δ des deux cercles que les cercles ont des équations de la forme :

$x^2 + y^2 -2a_1x + b = 0$ $\qquad$ $x^2 + y^2 -2a_2x + b = 0$

A quelle condition ces cercles sont-ils sécants ? tangents ? d'intersection vide ?

4°)Déterminer C(A,R) pour que l'axe radical de C(A,R) et $C(A_1,R_1)$ soit Δ = Oy. Donner l'allure de ces cercles C(A,R) selon le signe de b

5°)On dit que deux cercles du plan sont orthogonaux lorsqu'ils sont sécants et que leurs tangentes sont perpendiculaires en leurs points d'intersections. Démontrer que C(A,R) et C(A',R') sont orthogonaux si et seulement si $AA'^2=R^2+R'^2$

6°)Préciser les équations des cercles C(A,R) orthogonaux à $C(A_1,R_1)$ et $C(A_2,R_2)$

Exercice 3: théorème de Descartes

1°)Soit (OABC) un trièdre rectangle, c'est-à-dire tel que $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Montrer directement que le carré de l'aire du triangle (ABC) est égal à la somme des carrés des aires des trois autres triangles (OAB), (OBC) et (OCA) (résultat trouvé par Descartes en 1619)

Les questions 2°),3°) et 4°) donnent d'autres démonstrations du même résultat

2°)Une pyramide OABC est formée de quatre triangle dont trois sont rectangles en 0. On note (a,b,c) les longueurs OA,OB et OC et (α,β,γ) les longueurs BC, CA et AB

a)Démontrer à l'aide des produits scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ que l'aire S du triangle ABC vérifie :

$$16S^2 = (\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) = 2(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2) - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4$$

b)Calculer S en fonction de (a,b,c) et retrouver le théorème de Descartes

3°)Retrouver le théorème de Descartes en introduisant le projeté orthogonal commun H de O et de A sur la droite BC.

4°)Retrouver le théorème de Descartes en introduisant une équation du plan ABC dans un repère orthonormé convenable.