LYCEE FABERT - MPSI1

## Devoir de Mathématiques n°5 - DH4 - à rendre le lundi 08/10/2007

### Exercice 1 : une équation différentielle non linéaire

Soit $a>0$. On considère l'équation différentielle du premier ordre non linéaire :

(E) $y' = a|y|$

On considère une solution f de (E ) sur R.

a)Quel est le sens de variation de f ?

b)On suppose qu'il existe $x_0$ élément de R tel que $f(x_0)>0$. Montrer que $f>0$ (c'est-à-dire que pour tout x de R $f(x)>0$). On pourra effectuer un raisonnement par l'absurde

c) On suppose qu'il existe $x_0$ élément de R tel que $f(x_0)<0$. Montrer par un raisonnement analogue que $f<0$ (c'est-à-dire que pour tout x de R $f(x)<0$)

d)Résoudre (E ) sur R.

### Exercice 2 : équation différentielle d'Euler

On considère sur $R_+^*$ l'équation différentielle d'Euler

(E ) $at^2y'' + bty' + cy = f(t)$

où a,b,c sont trois nombres réels donnés (a non nul) et f une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans R

a)On convient de poser $z(x) = y(e^x)$ avec $x>0$. Calculer $z'(x)$, $z''(x)$ à l'aide des dérivées de y puis démontrer que y est solution de (E ) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.

b)Résoudre explicitement l'équation d'Euler

$t^2 y'' + ty' + y = \cos(2\ln(t))$ pour $t>0$

c)Résoudre explicitement l'équation d'Euler

$t^2 y'' -2 ty' + 2y = 2t^3 \sin(2t)$ pour $t>0$

### Problème

Soit $f_{a,b}$ la fonction définie sur R par : $f_{a,b}(x) = \dfrac{a}{1+(bx)^2}$ et soit $\Gamma_{a,b}$ la courbe représentative de $f_{a,b}$. On note f la fonction correspondant aux paramètres a=1 et b=1.

Q1-a-On fixe b=1. Déterminer une équation différentielle ayant pour ensemble de solutions les fonctions $f_{a,1}$

b-Déterminer une équation différentielle du premier ordre $(F_b)$ dépendant de b , ayant pour solutions les fonctions $f_{a,b}$, a décrivant R

Q2-a-On fixe a=1. On cherche une équation différentielle du premier ordre ayant pour solutions les fonctions $f_{1,b}$

a1-Montrer que sur le demi-plan $x>0$, les courbes $\Gamma_{a,b}$ pour n non nul admettent une équation cartésienne de la forme $x = \beta\, g(y)$ où g est une fonction à déterminer

a2-Trouver une équation différentielle du premier ordre ayant pour solutions sur l'intervalle $]0,1[$ les fonctions $\beta g$, $\beta$ décrivant R

a3-En déduire une équation différentielle de la forme $P(y) - xy' = 0$ où P est un polynôme, admettant entre autres les fonctions $f_{1,b}$ pour solutions quand b parcourt R.

b-Ecrire une équation différentielle $(G_a)$ ayant pour solutions entre autres les fonctions $f_{a,b}$, b décrivant R

Q3-0n cherche maintenant une équation différentielle linéaire du second ordre ayant pour solutions les fonctions $f_{a,b}$ (a,b) décrivant $R^2$

a-En partant de l'équation $(F_b)$ , trouver une équation différentielle € indépendante de b liant x,y,y' et y''

b-Retrouver l'équation (E) en partant de l'équation $(G_a)$