LYCEE FABERT - MPSI1

Devoir de Mathématiques n°3 - DH3 - à rendre le lundi 01/10/07

Exercice : fonctions circulaires réciproques (questions indépendantes)

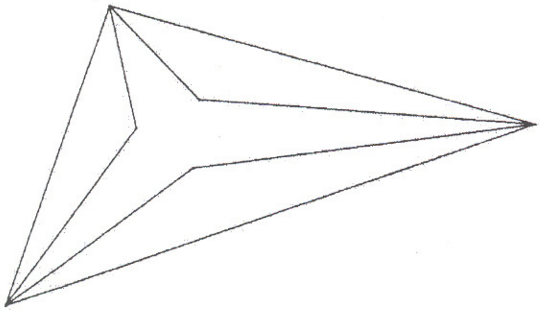
1°)Montrer que : $\forall x\in \mathbb{R}$, $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2}) = \pi/2$

2°) Montrer que : $\forall x\in]0,1]$, $2.\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \pi/2$

3°)Montrer que les fonctions : $x \to \cos(n(\arccos(x)))$ et $x \to \dfrac{\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$ (n entier naturel) sont polynomiales

Problème : théorème de Morley

Les trisectrices sont les droites qui découpent un angle en trois angles égaux. L'objet de ce problème est de présenter le théorème de Morley, relatif aux trisectrices d'un angle.



Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct qui permet de définir l'affixe complexe d'un point et le représentant d'un nombre complexe. Les nombres complexes a,b,c sont les affixes de trois points A,B,C. Les nombres réels α,β,γ sont dans $]0,\pi/3[$ et vérifient : 3α (respectivement $3\beta,3\gamma$) est une mesure de l'angle orienté ($\vec{AB}$, $\vec{AC}$) (respectivement ($\vec{BC}$, $\vec{BA}$),($\vec{CA}$, $\vec{CB}$)). Les nombres complexes u,v,w sont définis par : $u=e^{2i\alpha}$, $v=e^{2i\beta}$, $u=e^{2i\gamma}$). On définit aussi les transformations complexes R_a, R_b, R_c par :

$R_a(z) = u(z-a)+a$ $\quad$ $R_b(z) = v(z-b)+b$ $\quad$ $R_c(z) = w(z-c)+b$

Partie I – Calculs préliminaires

1°)Soit Z_1,Z_2,Z_3 trois points distincts d'affixes z_1,z_2,z_3 tels que : $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$. Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes : $\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2}, \dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}, \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$. En déduire que le triangle (Z_1,Z_2,Z_3) est équilatéral.

2°)Montrer que uv, vw, wu sont différents de 1 et que uvw = j

3°)Mettre sous forme trigonométrique les deux nombres complexes : $\dfrac{u(1-v)}{1-uv}, \dfrac{1-u}{1-uv}$

4°)On considère trois nombres complexes p,q,r vérifiant les relations suivantes :

$(1-v)b+v(1-w)c = p(1-vw)$ $\quad$ $(1-w)c+w(1-u)a = q(1-wu)$ $\quad$ $(1-u)a+u(1-v)b = r(1-uv)$

On pose $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$. Montrer que $E = \dfrac{w}{u}j^2(u^3-1)a + \dfrac{u}{v}(v^3-1)b + \dfrac{v}{w}j(w^3-1)c$

Partie II – Point fixe de $R_a o R_b$

On appelle point fixe d'une transformation complexe f tout nombre complexe z tel que f(z) = z

1°)Caractériser les transformations géométriques associées aux transformations complexes R_a,R_b,R_c

2°)Montrer que $R_a o R_b$ a un unique point fixe r, représentant le point R, vérifiant : $(1-u)a+u(1-v)b=r(1-uv)$

3°)En soustrayant (1-uv)a de chaque côté de la relation précédente, préciser l'angle ($\vec{AB}$, $\vec{AR}$)

4°)Préciser de même l'angle ($\vec{BA}$, $\vec{BR}$)

5°)On définit de même p,P,q,Q à partir de $R_b o R_c(b) = b$; $R_c o R_a(q) = q$; placer P,Q,R sur une figure

Partie III – Configuration principale de Morley

1°)Montrer que le représentant de $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) ($R_c^3=R_c o R_c o R_c$)

2°)Montrer que $R_a^3 o R_b^3 o R_c^3$ est l'identité de l'ensemble C des nombres complexes

3°)Calculer $R_a^3 o R_b^3 o R_c^3(z)$. En déduire que : $(1-u^3)a+u^3(1-v^3)b+u^3v^3(1-w^3)c = 0$

4°)Montrer que le triangle (P,Q,R) est équilatéral (théorème de Morley)