LYCEE FABERT - MPSI1

Devoir de Mathématiques n°2 - DH2 - à rendre le lundi 17/09/2007

Exercice 1 : propriété du polygone régulier

On appelle $A_1, \ldots, A_n$ les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon R ; soit M un point quelconque de ce cercle. Montrer que

$$MA_1^2 + \ldots\ldots + MA_n^2$$

est un nombre indépendant de M.

Exercice 2 : un lieu géométrique classique

Montrer que les projections orthogonales d'un point M sur les côtés d'un triangle ABC sont alignées si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 3 : une somme trigonométrique et une somme hyperbolique

Pour a,b réels et $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, évaluer :

a) $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin((k+1)\theta)$

b) $S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(a+kb)$

Rappel : pour tout entier naturel n , pour tous complexes a et b, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{(formule du binôme de Newton)}$$

Exercice 4 : droite d'Euler, cercle d'Euler d'un triangle

Soient trois points non alignés A_1,A_2,A_3 d'affixes respectives a_1,a_2,a_3 ; on désigne par O le centre du cercle circonscrit à ce triangle que l'on prendra pour origine du plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle G et H le centre de gravité et l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$. On admettra que l'affixe de H est $a_1+a_2+a_3$

1°)Montrer que les points O,G,H sont alignés et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. La droite obtenue s'appelle la droite d'Euler du triangle.

2°)Soit ω le centre du cercle circonscrit (γ) au triangle M_1,M_2,M_3 , M_1,M_2,M_3 étant les milieux respectifs des segments $[A_2A_3]$, $[A_3A_1]$, $[A_1A_2]$. Trouver son affixe et en déduire que $\overrightarrow{O\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$

3°)a)Montrer que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à chacun de ses côtés appartient au cercle circonscrit au triangle

b)Montrer que l'affixe k_1 du pied K_1 de la perpendiculaire abaissée de A_1 sur la droite (A_2A_3) est

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2 + a_3 - \frac{a_3 a_2}{a_1}\right)$$

c)Montrer que le cercle (γ) passe par K_1.

d)En conclure que le cercle (γ) passe par les pieds K_1,K_2,K_3 des hauteurs du triangle A_1,A_2,A_3

4°)Calculer le rayon du cercle (γ) . Que peut-on en déduire par rapport au rayon du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$?

5°)Soit P_1 le milieu du segment $[HA_1]$. Montrer que le cercle (γ) passe par P_1. En déduire que le cercle (γ) passe par les milieux des segments $[HA_1]$, $[HA_2]$, $[HA_3]$, ce qui justifie le nom du cercle (γ) appelé cercle des neufs points du triangle A_1,A_2,A_3

6°)Donner une conclusion générale