LYCEE FABERT - MPSI1

Devoir de Mathématiques n°19 - DH13 – à rendre le vendredi 15/02/08

Le but du problème est de déterminer un équivalent de la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n(\alpha) = \frac{1}{(C_{2n}^n)^\alpha}\left[\sum_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^\alpha\right] \quad \text{où} \quad \alpha > 0.$$

On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \exp(-t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}}$.

Dans tout le problème, r est un réel tel que $\frac{1}{2} < r < 1$.

1.*a.* Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $\int_1^{n+1} e^{-\alpha\frac{x^2}{n}}\,dx \leqslant v_n(\alpha) \leqslant \int_0^n e^{-\alpha\frac{x^2}{n}}\,dx$.

b. En déduire que : $v_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n\pi}{\alpha}}$.

2.*a.* Montrer que : $\sum\limits_{n^r < k < n} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \leqslant n\, e^{-\alpha n^{2r-1}}$.

b. En déduire que : $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n^r} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n(\alpha)$.

On notera désormais : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, k \in [2, n] \cap \mathbb{N}$, $p_n(k) = \dfrac{\prod\limits_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{j}{n}\right)}$ et $p_n(1) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}}$.

3.*a.* Montrer que : $u_n(\alpha) = \frac{2}{(C_{2n}^n)^\alpha}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} (C_{2n}^{n+k})^\alpha\right] + 1$.

b. Établir que, $\forall\, k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, $C_{2n}^{n+k} = C_{2n}^n\, p_n(k)$.

4.*a.* Soit $t \in [0, 1[$. Établir que : $\forall\, x \in [0, t]$,

(1) $$2x \leqslant \ln(1+x) - \ln(1-x) \leqslant \frac{2x}{1-t^2}$$

(2) $$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x\,.$$

b. En déduire que, $[p_n(k)]^\alpha \; e^{\alpha \frac{k^2}{n}} \leqslant e^{\alpha \frac{k^2}{2n^3}}$.

c. Montrer que, en utilisant le *b.*,

$$\sum_{n^r < k \leqslant n} [p_n(k)]^\alpha$$

est négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

5.*a.* Montrer que l'on a :

$$u_n(\alpha) - 2\, v_n(\alpha) = 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n^r} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} \left([p_n(k)]^\alpha \, e^{\alpha \frac{k^2}{n}} - 1 \right) + o(v_n(\alpha))\,.$$

où $o(v_n(\alpha))$ est une suite négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$.

b. En utilisant (1) et (2), établir l'inégalité suivante :

$$\forall\, k \in [1, n^r] \cap \mathbb{N}, \quad [p_n(k)]^\alpha \, e^{\alpha \frac{k^2}{n}} \geqslant \exp\left(- \frac{\alpha}{n^{3-4r}(1 - n^{2r-2})} \right).$$

c. En choisissant r convenablement, en déduire que :

$$2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n^r} \left(e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} \left[(p_n(k))^\alpha \, e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} - 1 \right] \right)$$

est négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

d. En déduire finalement que $u_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

e. *Cas particulier :* Donner un équivalent de C_{2n}^n.