Devoir de Mathématiques n°14 - DH10 - à rendre le lundi 14/01/2008LYCEE FABERT - MPSI1

Exercice 1

Soit un intervalle réel, f une fonction deux fois dérivables sur I à valeurs réelles , a,b,c trois points distincts de I tels que a<b<c. Montrer l'existence d'un point d de I tel que :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(d)$$

L'hypothèse a<b<c est-elle nécessaire ?

Exercice 2

1°)Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 4 de f définie par :

$$f(x) = \exp\left(\frac{e^x-1}{x}\operatorname{Arc}\sin x\right)$$

2°)Déterminer la limite en $+\infty$ de h définie par :

$$h(x) = \left(2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)^{x^2}$$

3°)Soient p et q deux entiers naturels non nuls ; déterminer un équivalent simple, au voisinage de 0 de
$g(x) = \arcsin^p x - x^q$

4°)Soient a et b deux réels ; déterminer la partie principale , au voisinage de 0, de :

$f_{a,b} : x \to \ln(1+x+ax^2) - \dfrac{x}{1+bx}$

Exercice 3 : développement limité d'une réciproque

Soit f de [-1/4,1/4] dans R définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$

1°)Montrer que f admet une réciproque f^{-1}

2°)Montrer que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre en 0. Expliciter le développement limité à l'ordre 4 de f^{-1} en 0

Problème

Soient a et b tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^{∞} sur $]a, b[$.

f est dite absolument monotone (en abrégé AM) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a.b[, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

f est dite complètement monotone (en abrégé CM) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a.b[, (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Partie I -

I.A - Soient f et g deux fonctions AM définies sur $]a, b[$. Montrer que $f + g$ et fg sont AM. Qu'en est-il pour les fonctions CM ?

I.B - Si f est une fonction AM sur $]a.b[$, montrer par récurrence que e^f l'est aussi.

I.C - Soient $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]-b, -a[\to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(-x)$. Montrer que f est AM sur $]a,b[$ si, et seulement si, g est CM sur $]-b, -a[$.

I.D -

I.D.1) Vérifier que la fonction $-\ln$ est CM sur $]0, 1[$.

I.D.2) Montrer que $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est AM sur $]0, 1[$.

I.D.3) Montrer que la fonction arcsin est AM sur $]0, 1[$.

I.D.4) Montrer que la fonction tan est AM sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

I.E -

I.E.1) On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R}$ et f est AM sur $]a.b[$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda = \lim_{a^+} f.$$

On prolonge f en posant $f(a) = \lambda$. Montrer que f est dérivable à droite en a, et que f' est continue à droite en a.

I.E.2) Plus généralement, montrer que f est indéfiniment dérivable à droite en a avec des dérivées positives ou nulles. Le même phénomène se produit-il en b ?