LYCEE FABERT - MPSI1

Devoir de Mathématiques n°1 - DH1 - à rendre le lundi 10/09/2007

Exercice 1 : trigonométrie

1°)Résoudre les inéquations d'inconnue x

a)$\tan(x) - \sqrt{3} > 0$

b)$\cos(3x) - \sin(3x) < \sqrt{2}$

c)$\cos(2x) > \cos(x) - 1$

2°)Démontrer l'inégalité :

$\forall x \in]0,\pi/2[,\ x - \sin(x) < \tan(x) - x$

Exercice 2 : calcul d'une somme trigonométrique

Simplifier :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right) = \sin^3(\alpha/3) + 3\sin^3(\alpha/3^2) + \ldots\ldots + 3^{n-1}\sin^3(\alpha/3^n)$$

(α est un réel quelconque)

Exercice 3 : médiatrices des côtés d'un triangle, affixe du centre du cercle circonscrit

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un triangle ABC quelconque, les points A,B,C ayant respectivement pour affixes a,b,c. Les médiatrices des segments [AB] et [BC] sont concourantes en Ω d'affixe ω

1°)Démontrer géométriquement que ce point Ω appartient à la médiatrice du segment [AC]

2°)Exprimer sous forme complexe que Ω appartient à la médiatrice de [AB] et à la médiatrice de [BC]

3°)On obtient ainsi un système dans lequel les inconnues sont ω et son conjugué ; en éliminant ce conjugué entre ces deux équations , en déduire l'affixe ω du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4 : deux inégalités trigonométriques

1°)Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \geq \frac{n}{4}$

(on pourra remarquer que $\forall k \in \mathbb{N},\ |\cos(k)| \geq \cos^2 k$)

2°)Soient $z_1, \ldots, z_n$ n nombres complexes non nuls. Montrer qu'il existe une partie I inclus dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que :

$$\left|\sum_{k \in I} z_k\right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

(on pourra considérer les quatre quadrants délimités par les deux bissectrices du repère canonique du plan associé à C, partager l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ en quatre parties I_1, I_2, I_3, I_4 (certaines pouvant être vides) selon l'appartenance des images de z_k à l'un des quadrants limités par les deux bissectrices du repère et remarquer que le problème est invariant par rotation autour de l'origine)