Devoir de Mathématiques n°9

Kévin Polisano
MPSI 1

Vendredi 21 décembre 2007

Exercice 1 : Domination

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x^2}[x\cos^2(x) + \sin^2(x)]$

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x^2}[2x^2\cos^2(x) + 2x\sin(x) + \cos^2(x) - 2x\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)]$$

En linéarisant $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et en prenant $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ on se ramène à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x^2}[x^2 + x + \frac{1}{2} + \cos(2x)(x^2 - x + \frac{1}{2}) - (x-1)\sin(2x)]$$

En utilisant le fait que le cosinus et le sinus sont bornés on obtient l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2}(x+1) \leq f'(x) \leq xe^{x^2}(2x+1)$$

On en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty}$$

Ainsi à partir d'un certain x la dérivée est strictement positive et donc au voisinage de l'infini la fonction f est strictement croissante.

2) De même en linéarisant on transforme l'expression comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}[x + 1 + (x-1)\cos(2x)]$$

Il en découle l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} \leq f(x) \leq xe^{x^2}$$

Et on en déduit par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = 2n\pi \text{ et } v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Ces deux suites sont strictement croissantes et divergent en $+\infty$, ainsi par continuité de f et g :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{f(U_n)}{g(U_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(V_n)}{g(V_n)} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n\pi} = +\infty}$$

On en déduit deux choses l'une : au voisinage de $+\infty$, f n'est pas dominée par g, et g n'est pas dominée par f.

Exercice 2 : Égalité de Taylor-Lagrange

Soit f une application de classe C^n de l'intervalle fermé I d'extrémités a et b $(a \neq b)$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur l'intérieur de I. Montrons qu'il existe c élément de l'intérieur de I tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Définissons la fonction g tel que :

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A(b-x)^{n+1}$$

On impose $g(a) = 0$ en choisissant un A qui répond à cette hypothèse. Et on a clairement $g(b) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in [a, b]$ tel $g'(c) = 0$.

Dérivons g :

$$g'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{-k(b-k)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right] + (n+1)(b-x)^n$$

On simplifie :

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-k)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + (n+1)(b-x)^n$$

Et en effectuant un changement d'indice dans la première somme on aboutit à :

$$g'(x) = -(b-x)^n \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} + A(n+1)(b-x)^n$$

D'où :

$$g'(c) = (b-c)^n \left(-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} + A(n+1) \right) = 0$$

Et on en tire :

$$\boxed{A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}$$

Exercice 3 : Convexité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I. Montrons l'équivalence :

$$f \text{ est convexe } \Leftrightarrow \forall (x,y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Procédons par double implication :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nous avons vu qu'une fonction convexe vérifie l'inégalité de Jensen :

Soit f une fonction convexe définie sur un intervalle I, une famille de réels $(x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n$ et une autre $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in [0,1]^n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Ainsi en prenant $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ on a bien :

$$\boxed{f \text{ convexe} \Longrightarrow \forall (x,y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Démontrons au préalable le lemme suivant :

Lemme : L'ensemble des nombres λ de la forme $\lambda = \frac{k}{2^n}, (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Démonstration :

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y$ un couple de réels quelconque, montrons qu'il existe $\lambda = \frac{k}{2^n}$ tel que

$$x < \frac{k}{2^n} < y$$

Par la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n(y-x) > 1$, on a alors :

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < y - x$$

Posons $k = E(2^n x) + 1$, par définition de la partie entière :

$$k - 1 < 2^n x < k \Leftrightarrow \frac{k}{2^n} - \frac{1}{2^n} < x < \frac{k}{2^n}$$

L'inégalité de droite donne $x < \frac{k}{2^n}$, quant à celle de gauche puisque $\frac{1}{2^n} + x < y$ on a $\frac{k}{2^n} < y$ donc :

$$\boxed{x < \lambda < y}$$

Montrons désormais par récurrence que pour tout $\lambda = \frac{k}{2^n}$ avec $0 \leq k \leq 2^n$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + (1 - \frac{k}{2^n})f(y)$$

En appliquant l'inégalité il est clair que la propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle le reste au rang $n+1$:

• Si k est pair alors $k = 2k' \Rightarrow \dfrac{k}{2^{n+1}} = \dfrac{2k'}{2^{n+1}} = \dfrac{k'}{2^n}$ et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

• Si k est impair alors $k = 2k'+1$ et remarquons :

$$\frac{2k'+1}{2^{n+1}}x + \frac{2^{n+1}-(2k'+1)}{2^{n+1}} = \frac{\overbrace{\frac{k'}{2^n}x + \frac{2^n-k'}{2^n}y}^{X} + \overbrace{\frac{k'+1}{2^n}x + \frac{2^n-(k'+1)}{2^n}y}^{Y}}{2}$$

On a donc par hypothèse sur f :

$$f\left(\frac{2k'+1}{2^{n+1}}x + \frac{2^{n+1}-(2k'+1)}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{f(X)+f(Y)}{2}$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à X et Y :

$$\frac{f(X)+f(Y)}{2} \leq \frac{k'}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{k'}{2^{n+1}}\right)f(y)$$

D'où :

$$\boxed{f\left(\frac{2k'+1}{2^{n+1}}x + \frac{2^{n+1}-(2k'+1)}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{k'}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{k'}{2^{n+1}}\right)f(y)}$$

La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

On a donc démontré que tous les λ de la forme $\frac{k}{2^n}$ vérifient l'inégalité traduisant la convexité d'une fonction.

Or ces nombres étant denses dans $\mathbb{R}$ on peut extrapoler cette relation à tous réels, ce qui clos la démonstration.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \Longrightarrow f \text{ convexe}}$$

Exercice 4 : Développement asymptotique d'une suite de solutions d'équations

1) La fonction $f_n : x \mapsto \ln(x) + nx$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+^\star}$ car dérivable et de dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+^\star}, f_n'(x) = \frac{1}{x} + n > 0$$

De plus $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+^\star}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc l'équation $\ln(x) + nx = 0$ possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+^\star}$.

2) Remarquons la chose suivante :

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \ln(x_{n+1}) + (n+1)x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \ln(x_{n+1}) + nx_{n+1} = -x_{n+1}$$

Ainsi :

$$f_n(x_{n+1}) = -x_{n+1} < 0 = f_n(x_n) \text{ car } x_{n+1} \in \mathbb{R}^{+^\star}$$

De surcroît f_n étant strictement croissante l'inégalité précédente implique :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} < x_n}$$

On en conclut que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers ℓ.

Supposons que $\ell > 0$, alors puisque la suite est strictement décroissante on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ell < x_n$$

Par stricte croissance de $x \mapsto \ln(x)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\ell) < \ln(x_n)$$

Et enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\ell) + n\ell < \ln(x_n) + nx_n$$

Or puisque $\ell > 0$ il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\ell) + n\ell = +\infty$$

Ce qui est absurde puisque $\ln(x_n) + nx_n = 0$, par conséquent :

$$\boxed{\ell = 0}$$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n = nx_n$. On a l'équivalence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, y_n + \ln(y_n) = \ln(n) \Leftrightarrow nx_n + \ln(nx_n) = \ln(n) \Leftrightarrow \ln(x_n) + nx_n = 0$$

La fonction $g : x \mapsto x + \ln(x)$ réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}^{+^\star}$ sur $\mathbb{R}$ et $y_n = g^{-1}(\ln(n))$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty}$$

5) D'après la question précédente on peut établir au voisinage de l'infini :

$$\ln(y_n) = o(y_n)$$

En reportant dans l'équation on a :

$$y_n + o(y_n) = \ln(n)$$

Ce qui prouve que :

$$\boxed{y_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)}$$

Et comme $y_n = nx_n$ on en déduit :

$$\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}$$

6)a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives de limite ∞ telles que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Ces suites sont strictements positives donc il est légitime de poser :

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 = \frac{\ln(u_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$$

Or par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1 \Leftrightarrow \ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(v_n)}$$

b) Les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}\backslash\{1\}, U_n = \ln(n)$ sont strictements positives de limite $+\infty$ donc :

$$y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \Rightarrow \ln(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

Et puisque $y_n + \ln(y_n) = \ln(n)$ alors :

$$y_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln(n))$$

D'où :

$$\boxed{x_n - \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(\ln(n))}{n}}$$

7) Le dernier équivalent nous donne $y_n = \ln(n) - \ln(\ln(n)) + z_n$ avec $z_n = o(\ln(\ln(n)))$.

Ainsi en reportant dans $\ln(y_n) + y_n = \ln(n)$ il vient :

$$\ln\left(\frac{\ln(n) - \ln(\ln(n)) + z_n}{\ln(n)}\right) + z_n = 0 \Leftrightarrow z_n = -\ln\left(1 - \frac{\ln(\ln(n)) - z_n}{\ln(n)}\right)$$

Or puisque z_n est négaligeable devant $\ln(\ln(n))$ on a $\frac{\ln(\ln(n))-z_n}{\ln(n)} \sim \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$ et de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$$

Donc comme au voisinage de 0 $\ln(1+x) \sim x$ on obtient :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$$

D'où finalement le développement asymptotique :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(\ln(n))}{n} + \frac{\ln(\ln(n))}{n\ln(n)}}$$