Devoir de Mathématiques n°8

Kévin Polisano
MPSI 1

Lundi 10 décembre 2007

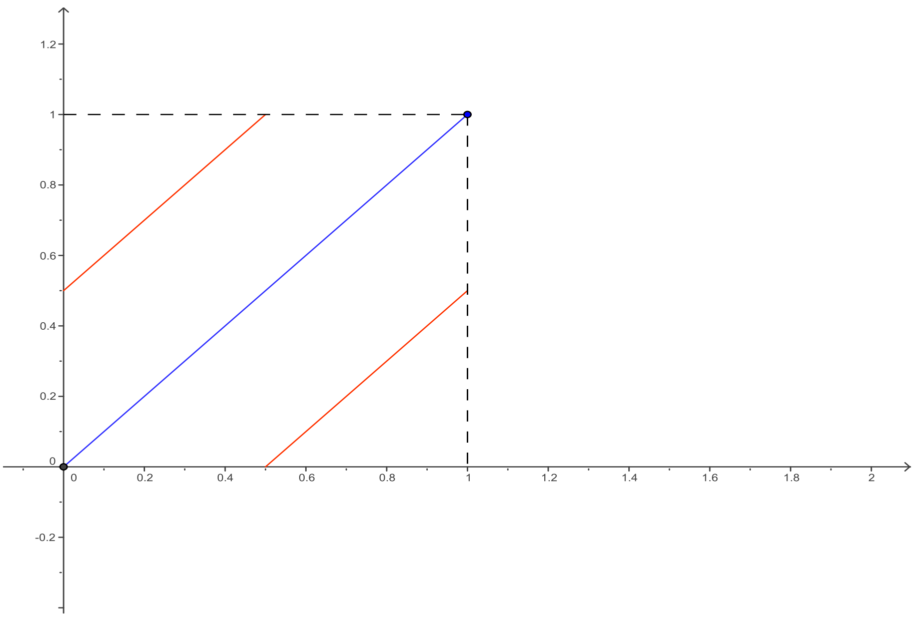
Exercice 1 : Application bijective et continue en aucun point

On considère la fonction f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x \text{ si x rationnel} \\ f(x) = x + \frac{1}{2} - E\left(x + \frac{1}{2}\right) \text{ sinon} \end{cases}$

1) Il y a trois cas à distinguer afin d'imaginer la représentation graphique de f :

- Si x est rationnel alors $f(x) = x$ par définition
- Si x est irrationnel et $x \in]0, \frac{1}{2}[$ on a $E\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ et donc $f(x) = x + \frac{1}{2}$
- Si x est irrationnel et $x \in]\frac{1}{2}, 1[$ on a $E\left(x + \frac{1}{2}\right) = 1$ et donc $f(x) = x - \frac{1}{2}$

Schéma du support de la fonction :



2) Montrons que f n'est continue en aucun point de $[0,1]$:

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a + \frac{\pi}{8n}$ avec $a \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}[$.

Cette suite est irrationnelle puisque π l'est et de plus pour n suffisamment grand $\frac{\pi}{8n} < \frac{1}{2} - a$.

Ainsi à partir d'un certain rang n_0 :

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ donc } f(u_n) = u_n + \frac{1}{2}$$

Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a + \frac{1}{2} \neq a}$$

On en conclut que f n'est pas continue sur $]0, \frac{1}{2}[$ (raisonnement analogue pour $b \in \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{2}, 1]$).

Si maintenant $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers c et dont la limite de $f(v_n)$ est différente de $f(c)$.

Ainsi f n'est continue en aucun point de $[0, 1]$.

3) a) Déterminons la composée de f avec elle-même :

• Si x est rationnel alors on a directement $f(x) = x \Rightarrow f \circ f(x) = f(x) = x$

• Si x est irrationnel alors $f \circ f(x) = \left(x + \frac{1}{2} - E\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} - E\left[\left(x + \frac{1}{2} - E\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\right]$

Dans ce deuxième cas on a :

$$f \circ f(x) = x + \left[1 - E\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] - E\left[x + \underbrace{1 - E\left(x + \frac{1}{2}\right)}_{N}\right]$$

Et puisque N est un entier il vient :

$$\forall x \in [0, 1[, f \circ f(x) = x - E(x) = x \text{ car } \forall x \in [0, 1[, E(x) = 0$$

Dans tous les cas on a donc :

$$\boxed{f \circ f(x) = Id_{[0,1]}}$$

L'application $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une involution donc est bijective.

Exercice 2 : Continuité et équation fonctionnelle

On se propose de trouver les applications $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continues et bijectives vérifiant :

$$\forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x$$

La démonstration qui suit montre que l'hypothèse de continuité n'est pas nécessaire.

Tout d'abord il est clair que l'identité convient, montrons que c'est la seule.

En effet, f est définie de $[0,1]$ dans lui même donc on note que

$$\forall x \in [0,1], 0 \leq 2x - f(x) \leq 1$$

On définit alors une nouvelle fonction $g : [0,1] \to [0,1]$ telle que $g(x) = 2x - f(x)$.

Par définition on a $\forall x \in [0,1], f \circ g(x) = x$, montrons alors par récurrence que :

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, g^n(x) = n(g(x) - x) + x \ (*)$$

On a $g(g(x)) = 2g(x) - f(g(x)) = 2g(x) - x = 2(g(x) - x) + x$, la propriété est vraie pour $n = 2$.

Supposons là vraie au rang n et montrons qu'elle le reste au rang suivant :

$$g^{n+1}(x) = g^n(g(x)) = n[g(g(x)) - g(x)] = n[2g(x) - x - g(x)] + g(x) = (n+1)(g(x) - x) + x$$

La propriété est vraie au rang 1, 2 et est héréditaire, donc est vraie pour tout n.

Supposons qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $g(a) \neq a$. On a alors $g(a) - a > 0$ (resp. $g(a) - a < 0$).

Mais alors d'après $(*)$ on aurait donc

$$\lim_{n \to +\infty} g^n(x) = +\infty \ (\text{resp.} -\infty)$$

Cette dernière proposition est absurde puisque $\forall x \in [0,1], g(x) \in [0,1]$.

Finalement on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], g(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], f(x) = x}$$

Exercice 3 : Étude d'une suite récurrente d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 \geq 0$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = |u_{n+1} - u_n|$$

1) Chaque terme de la suite est obtenu par la valeur absolue de la différence des deux termes précédents, donc ils sont positifs avec en particulier $u_0 > 0$, $u_1 \geq 0$.

Rappelons que la valeur absolue d'un nombre a est définie par $|a| = \text{Max}(a, -a)$ donc :

$$u_{n+2} = \text{Max}(u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - u_n) \leq \text{Max}(u_n, u_{n+1}) \text{ car } (u_{n+1}, u_n) \in \mathbb{R}^{2^+}$$

Il est alors clair que si $(u_n, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{+^\star} \times \mathbb{R}^{+^\star}$ l'inégalité est stricte.

2) On suppose $\frac{u_1}{u_0} = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{qu_n}{u_0}$

a) Procédons par une récurrence d'ordre 2 :

La propriété est vraie au rang 0 et 1 puisque $v_0 = \frac{qu_0}{u_0} = q$ et $v_1 = \frac{qu_1}{u_0} = p$

Supposons là vraie au rang n et $n+1$ et montrons qu'elle le reste au rang $n+2$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{q(u_{n+1} - u_n)}{u_0} \Rightarrow |v_{n+1} - v_n| = \frac{q|u_{n+1} - u_n|}{u_0} = v_{n+2}$$

Le terme de gauche en valeur absolue est un entier naturel, donc il en va de même pour v_{n+2}.

La propriété est vraie au rang 0 et 1 et héréditaire donc vraie pour tout n.

b) On veut montrer la proposition suivante :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, v_{n_0} = 0 \; v_k \neq 0 \text{ si } k < n_0$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas, on a alors l'inégalité stricte :

$$u_{n+2} < \text{Max}(u_n, u_{n+1})$$

Par ailleurs on a :

$$u_{n+1} < \text{Max}(u_{n-1}, u_n) \text{ et } u_n \leq \text{Max}(u_{n-1}, u_n)$$

Donc :

$$\text{Max}(u_n, u_{n+1}) \leq \text{Max}(u_{n-1}, u_n)$$

Par suite

$$u_{n+2} < \text{Max}(u_{n-1}, u_n)$$

Et puisque $u_{n+1} < \text{Max}(u_{n-1}, u_n)$ alors :

$$\text{Max}(u_{n+2}, u_{n+1}) < \text{Max}(u_n, u_{n-1})$$

Ainsi la suite extraite $\text{Max}(v_{2n}, v_{2n+1})$ est strictement décroissante.

Or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à valeur dans $\mathbb{N}$, la méthode de la descente infinie stipule qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers positifs, d'où la contradiction.

Il en découle qu'il existe un plus petit entier n_0 tel que $v_{n_0} = 0$ et alors $\forall k < n_0, v_k \neq 0$.

c) On a exhibé un n_0 tel que $v_{n_0} = 0$ donc $u_{n_0} = 0$, ainsi :

$$u_{n_0+1} = |u_{n_0} - u_{n_0-1}| = u_{n_0-1}$$
$$u_{n_0+2} = |u_{n_0+1} - u_{n_0}| = u_{n_0-1}$$
$$u_{n_0+3} = |u_{n_0+2} - u_{n_0+1}| = 0$$

Et ainsi de suite pour tout $n \geq n_0$, donc la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'existe pas puisqu'à partir du rang pour lequel elle s'annule, la suite ne prend alors plus que deux valeurs distinctes à savoir 0 et u_{n_0-1}.

3) On suppose maintenant $\frac{u_1}{u_0}$ irrationnel.

a) Supposons qu'il existe n_1 tel que $u_{n_1} = 0, \; u_k \neq 0 \; k < n_1$.

Alors on aurait $u_{n_1-1} = u_{n_1-2} = \alpha$ et $u_{n_1-3} = 2\alpha$ donc $\frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

Montrons alors par récurrence que tout quotient $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ est irrationnel :

En effet au rang 1 $\frac{u_1}{u_0}$ est irrationnel par hypothèse, supposons alors $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ irrationnel.

Il s'en suit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|u_n - u_{n-1}|}{u_n} = \left|1 - \frac{u_{n-1}}{u_n}\right| \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais.

Je n'ai pas eu le temps de traiter les dernières questions, à la louche je dirais pour la **c)** qu'il faut extraire une sous suite décroissante, et utiliser le fait que celle-ci est minorée donc convergente vers sa borne inférieure, ou bien faire une itération grâce à la question précédente pour coincer une infinité de termes dans un intervalle d'extrémité la borne inférieure. Puis montrer que celle-ci est nulle pour en conclure que la limite de la suite étudiée l'est également.

Voici une procédure Maple permettant de calculer le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

```
S :=proc(n,a,b) local i, x, y, temp;

x :=a;

y :=b;

temp :=abs(a-b);

    for i from 1 to n do

        temp :=abs(x-y);

        x :=y;

        y :=temp;

        print(temp,evalf(temp));

    od;

end;
```