Devoir de Mathématiques n°7

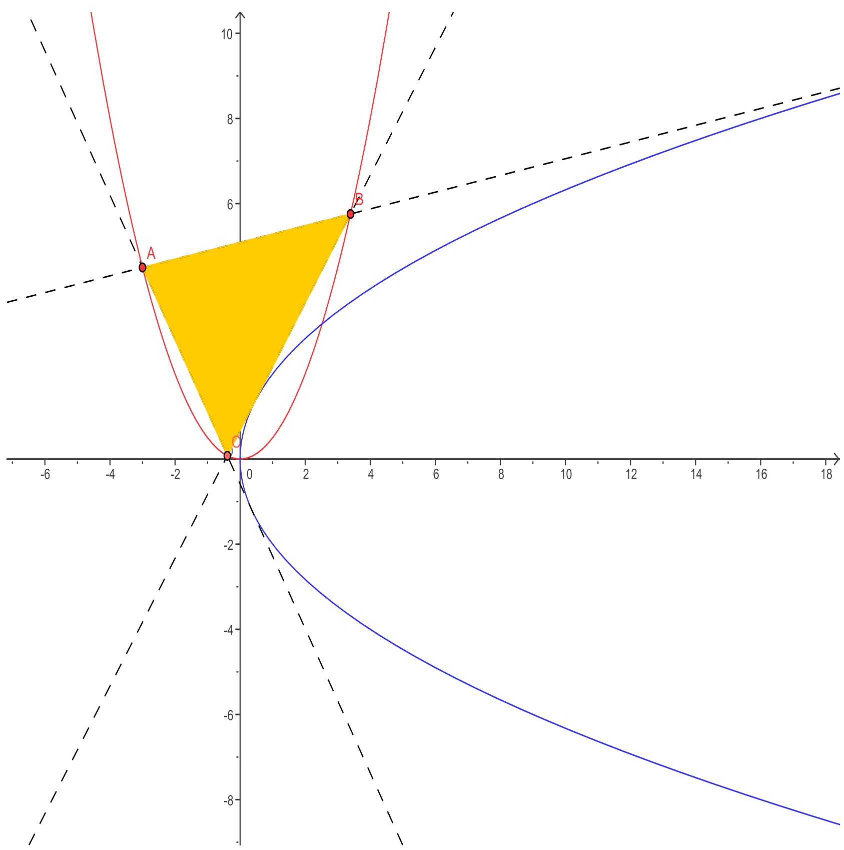
Kévin Polisano
MPSI 1

Jeudi 29 novembre 2007

Exercice 1 : Deux paraboles

Dans le plan affine euclidien, on considère deux paraboles d'équation $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2qy$. Montrons qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans l'une et circonscrits à l'autre.

Principe de résolution : On nomme $\mathcal{H}$ la parabole d'axe horizontale et $\mathcal{V}$ celle d'axe vertical définies respectivement par les équations ci-dessus. On considère un point A d'abscisse strictement négative x_0 appartenant à $\mathcal{V}$. On trace ensuite les deux tangentes à $\mathcal{H}$ passant par A qui coupent $\mathcal{V}$ en B et C. Il suffit enfin de montrer que (BC) est tangente à $\mathcal{H}$. Si cette conjecture est vérifiée pour x_0 quelconque alors il existe bel et bien une infinité de triangles inscrits à $\mathcal{V}$ et circonscrits à $\mathcal{H}$ pour x_0 balayant $\mathbb{R}^-$. Par symétrie des rôles joués par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ on aura également une infinité de triangles inscrits à $\mathcal{H}$ et circonscrits à $\mathcal{V}$.



Mise en équation :

Le point A appartenant à $\mathcal{V}$ on a $A\left(x_0, \frac{x_0^2}{2q}\right)$. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan d'équation $y = mx+m'$.

On souhaite que $\mathcal{D}$ passe par A donc $\frac{x_0^2}{2q} = mx_0+m' \Longleftrightarrow m' = \frac{x_0^2}{2q} - mx$ d'où $y = m(x-x_0)+\frac{x_0^2}{2q}$.

$\mathcal{D}$ doit être tangente à $\mathcal{H}$ c'est-à-dire que son intersection avec $\mathcal{H}$ doit être réduite à un point :

$$\left(m(x-x_0)+\frac{x_0^2}{2q}\right)^2 = 2px \Longleftrightarrow m^2x^2+\left(-2m^2x_0+\frac{mx_0^2}{q}-2p\right)x+\left(m^2x_0^2-\frac{mx_0^3}{q}+\frac{x_0^4}{4q^2}\right)=0$$

Il y a un unique point d'intersection si et seulement si le discriminant de ce trinôme du second degré est nul, c'est à dire :

$$\left(-2m^2x_0+\frac{mx_0^2}{q}-2p\right)^2-4m^2\left(m^2x_0^2-\frac{mx_0^3}{q}+\frac{x_0^4}{4q^2}\right)=0 \Longleftrightarrow \frac{4p}{q}\left[(2x_0q)m^2-x_0^2m+pq\right]=0$$

On trouve ainsi comme désiré deux coefficients directeurs $m = \dfrac{x_0^2 \pm \sqrt{x_0^4 - 8x_0q^2p}}{4x_0q}$.

Les tangentes ont donc pour équations :

$$\boxed{y = \frac{x_0^2 \pm \sqrt{x_0^4-8x_0q^2p}}{4x_0q}(x-x_0)+\frac{x_0^2}{2q}}$$

Cherchons les points B et C intersections de ces droites avec $\mathcal{V}$:

$$x^2 = 2q\left(\frac{x_0^2 \pm \sqrt{x_0^4-8x_0q^2p}}{4x_0q}(x-x_0)+\frac{x_0^2}{2q}\right)$$

On obtient les points B et C de coordonnées :

$$B\left(\frac{\sqrt{x_0(x_0^3-8q^2p)}-x_0^2}{2x_0}, \frac{(\sqrt{x_0(x_0^3-8q^2p)}-x_0^2)^2}{8x_0^2q}\right)$$

$$C\left(-\frac{\sqrt{x_0(x_0^3-8q^2p)}+x_0^2}{2x_0}, \frac{(\sqrt{x_0(x_0^3-8q^2p)}+x_0^2)^2}{8x_0^2q}\right)$$

La droite (BC) a pour équation $y = -\dfrac{x_0}{2q}x - \dfrac{pq}{x_0}$ et l'intersection avec $\mathcal{H}$ donne un unique point

$$\boxed{I\left(\frac{2q^2p}{x_0^2}, \frac{2pq}{x_0}\right)}$$

Il existe donc une infinité de triangles inscrits dans une parabole et circonscrits à l'autre.

Exercice 2 : Sous groupes additifs de $\mathbb{R}$

1) On dit d'un ensemble G qu'il est discret si et seulement si $\exists \alpha > 0, G \cap]0, \alpha[= \emptyset$. Ainsi la proposition contraire stipule que G n'est pas discret si et seulement si $\forall \alpha > 0, G \cap]0, \alpha[\neq \emptyset$. Donc $\exists a \in G \cap]0, \alpha[$, posons alors $\forall x \in \mathbb{R}, p = E\left(\frac{x}{a}\right)$ on peut donc écrire $pa \leq x < pa + a \Longrightarrow pa + \alpha \leq x + \alpha$. Or puisque $a \in]0, \alpha[$ on a $a < \alpha$ c'est à dire $pa + a < pa + \alpha$ d'où $x < pa + a \leq x + \alpha$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0, G \cap [x, x + \alpha[\neq \emptyset$ par stabilité de G.

2) a) Soit a et b deux éléments distincts de I intervalle de longueur $\frac{\alpha}{2}$ et dans G. On a alors la condition $|a - b| \leq \frac{\alpha}{2} < \alpha$ donc inévitablement un des deux nombres $a - b$ ou $b - a$ appartient à $G \cap]0, \alpha[$ ce qui est exclu car cet ensemble est vide, donc $G \cap I$ contient au plus un élément. Pour tout intervalle X de longueur finie on a $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec I_n des intervalles de longueur $\frac{\alpha}{2}$ donc d'après le résultat précédent $G \cap X$ est soit finie, soit vide.

b) L'ensemble G contient un élément x_0 non nul par hypothèse. Si $x_0 > 0$ alors $x_0 \in G \cap \mathbb{R}^{+^*}$, sinon $-x_0 > 0 \in G$ par sa structure de groupe et donc $G \cap \mathbb{R}^{+^*}$ est non vide dans tous les cas. $G \cap \mathbb{R}^{+^*}$ est clairement minoré par 0 donc il possède une borne inférieure $m > 0$.

c) Montrons que $m \in G$. Raisonnons par l'absurde, supposons que m n'appartienne pas à G, alors d'après la caractérisation de la borne inférieure : $\exists y \in G, \forall \epsilon > 0, m < y < m + \epsilon$. Et en prenant $\epsilon = m$: $\exists y \in G, m < y < 2m$. De même en prenant $\epsilon = y - m$ on a : $\exists x, y \in G, m < x < y < 2m \Longrightarrow m - x < 0 < y - x < 2m - x$. Et puisque $x > m$ alors $2m - x < m$ ainsi $0 < y - x < m$ et donc $y - x \notin G \cap \mathbb{R}^{+^*}$. Or G est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$ donc si $(x, y) \in G^2 \Longrightarrow y - x \in G$ et puisque $y - x > 0$ on a aussi $y - x \in G \cap \mathbb{R}^{+^*}$ d'où la contradiction.

Montrons alors par double inclusion que $G = \{km, k \in \mathbb{Z}\}$:

• Soit $x \in \mathbb{Z}m \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = km$ et par ailleurs G est stable par addition donc en itérant le procédé d'addition il vient $x = km \in G$ donc $\mathbb{Z}m \subset G$.

• Soit $x \in G$ et $n = E\left(\frac{x}{m}\right)$ alors $n \leq \frac{x}{m} < n + 1 \Leftrightarrow nm \leq x < nm + m$ donc $x = nm + r$ avec $0 \leq r < m$. Or $x \in G$ et $nm \in G$ d'où $x - nm = r \in G$, donc si $r > 0, r < m$ absurde puisque m est le plus petit élement de G donc $r = 0$ et ainsi $x = nm \in \mathbb{Z}m$ par conséquent $G \subset \mathbb{Z}m$.

3) Soit $x, y > 0$ les groupes monogènes $\left\{ \begin{array}{l} X = \mathbb{Z}x \\ Y = \mathbb{Z}y \end{array} \right.$ et S le sous groupe engendré par x et y.

a) X contient 0 donc est non vide, si $z = kx \in X$ et $z' = k'x \in X$ alors $z + z' = kx + k'x = (k + k')x = Kx \in X$ avec $K = k + k' \in \mathbb{Z}$ et enfin $z = kx \in X \Longrightarrow -z = -kx = K'x \in X$ avec $K' = -k \in \mathbb{Z}$. Donc X est un sous groupe de $(R, +)$ (idem pour Y par symétrie des rôles de x et y).

De même soit $z = mx + ny \in S$ et $z' = m'x + n'y \in S$ alors $z + z' = (m + m')x + (n + n')y = Mx + Ny \in S$ avec $M = m + m' \in \mathbb{Z}$ et $N = n + n' \in \mathbb{Z}$ ainsi que $z = mx + ny \in S \Longrightarrow -z = (-m)x + (-n)y = M'x + N'y \in S$ avec $M' = -m \in \mathbb{Z}$ et $N' = -n \in \mathbb{Z}$.

b) • S est un sous groupe additif discret de $\mathbb{R}$ donc de la forme $S = \mathbb{Z}m$ avec m réel. Alors $x \in S \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = km$ de même $y = k'm$ et il en découle $\frac{x}{y} = \frac{km}{k'm} = \frac{k}{k'} \in \mathbb{Q}$.

• Réciproquement si $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ alors $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ tel que $pgcd(p,q) = 1$ soit $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = c$. Ainsi $z = mx + ny = (pm + qn).c \in \mathbb{Z}c$ qui est discret donc $S = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ l'est également.

On a donc démontré que S est discret si et seulement si $\frac{x}{y}$ est élément de $\mathbb{Q}$.

4) On suppose ici que $\frac{x}{y}$ est irrationnel, et $A = \{kx, k \in \mathbb{Z}^*\}$; $B = \{ky, k \in \mathbb{Z}^*\}$.

a) Supposons que $A \cap B = z$ alors puisque z appartient à chacun de ces ensembles il peut s'écrire $z = kx = k'y$ avec $(k, k') \in \mathbb{Z}^{*2}$ d'où $\frac{x}{y} = \frac{k'}{k} \in \mathbb{Q}$ ce qui est contraire à l'hypothèse $\frac{x}{y}$ irrationnel donc $A \cap B = \emptyset$.

b) On montre facilement que si $\frac{x}{y}$ est irrationnel alors le sous groupe engendré par x et y est dense dans $\mathbb{R}$, ainsi il existe une suite d'éléments (x_n) qui converge vers 0. C'est à dire $\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y, |x| < \epsilon$. Or tout élément $x \in \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ est de la forme $x = |a - b|$ avec $a \in A$ et $b \in B$. On peut donc écrire $\exists (a,b) \in A \times B, 0 < |a - b| \leq \epsilon$ qui est la caractérisation de la borne inférieure pour $inf\,\{|a - b|, (a,b) \in A \times B\} = 0$. CQFD.

5) Considérons le sous groupe additif de $\mathbb{R}$ suivant : $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ qui est le groupe des périodes du cosinus et qui est dense dans $\mathbb{R}$ puisque 2π est irrationnel et donc à fortiori dans $[-1, 1]$. Donc $\forall x \in [-1, 1]$ il existe une suite d'éléments (x_n) appartenant à $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ tel que (x_n) converge vers $\arccos(x)$. D'où par continuité de la fonction $x \mapsto cos(x)$ on en déduit que $cos(x_n)$ converge vers $cos(\arccos(x)) = x$. Mais par périodicité $cos(x_n) = cos(n)$ donc on a montré que l'ensemble $\{\cos(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 3 : Fractions continues et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On considère un irrationnel positif x et on lui associe la suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{x_n - [x_n]} \\ x_0 = x \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que les réels x_n sont irrationnels :

La propriété est vraie au rang 0 car $x_0 = x$ irrationnel. Supposons alors x_n irrationnel, $[x_n]$ est rationnel puisque partie entière de x_n. Or on montre facilement par l'absurde que la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est irrationnelle. En effet soit a irrationnel et b rationnel, si $c = a+b$ est rationnel alors $c-b = a$ également, absurde. De même on montre que l'inverse d'un irrationnel est irrationnel. Ainsi $x_n - [x_n]$ est irrationnel et par suite $\frac{1}{x_n - [x_n]} = x_{n+1}$ également. De plus la fonction $x \mapsto \widetilde{E}\,(x) = x - E(x)$ est à valeur dans $[0, 1[$ donc $\forall n \geq 1, x_{n+1} = \frac{1}{x_n - [x_n]} > 1$ avec $x_n - [x_n] \neq 0$ puisque x_n est irrationnel.

On définit deux suites de nombres entiers par $p_0 = 1, p_1 = [x]$ et $q_0 = 0, q_1 = 1$ et :

$$p_{n+1} = p_n[x_n] + p_{n-1} \text{ et } q_{n+1} = q_n[x_n] + q_{n-1}$$

b) Montrons que (p_n) et (q_n) sont positives, pour cela on procède par récurrence forte :

Initialisation : $p_2 = p_1[x_1] + p_0 = [x][x_1] + 1 > [x] = p_1 > 0$ car $\forall n \geq 1, x_n > 1$ et $x > 0$ donc la propriété est est vraie au rang 2. Supposons là vraie au rang $n - 1$ et n et montrons qu'elle le reste au rang $n+1$: $p_{n-1} > 0$, $p_n > 0$ et on a montré que $x_n > 1$ donc $p_n[x_n]+p_{n-1} = p_{n+1} > 0$ donc la propriété est héréditaire donc vraie pour tout n. Ainsi $p_{n+1}-p_n = p_n([x_n]-1)+p_{n-1} > 0$ car p_n, p_{n-1} sont positifs et $x_n > 1$ donc (p_n) est croissante. De manière analogue on montre que (q_n) est croissante.

Supposons alors (p_n) convergente vers une limite ℓ, on aurait donc au passage à la limite dans la relation de récurrence : $\ell = \ell[x_n]+\ell \Longrightarrow \ell[x_n] = 0$ et puisque $x_n > 1$ on aurait $\ell = 0$. Or (p_n) est croissante et strictement positive donc il est clair que (p_n) diverge en $+\infty$ (même procédé pour (q_n)).

c) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^{n-1}$:

Initialisation : $p_0q_1 - p_1q_0 = 1 = (-1)^{1-1}$ donc la propriété est vraie au rang 1. Supposons la vrai au rang n, ainsi au rang $n+1$:

$$p_nq_{n+1}-p_{n+1}q_n = p_n(q_n[x_n]+q_{n-1})-(p_n[x_n]+p_{n-1})q_n = -(p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

Donc la propriété est héréditaire, vraie au rang 1 et donc vraie pour tout n.

D'après Bézout on en déduit donc que p_n et q_n sont premiers entre eux et donc que $\frac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

d) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, x = \dfrac{(p_nx_n + p_{n-1})}{q_nx_n + q_{n-1}}$:

Initialisation : Au rang 1 on a $\dfrac{p_1x_1 + p_0}{q_1x_1 + q_0} = \dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_0}{q_1x_1} = [x] + \dfrac{1}{x_1} = [x] + x - [x] = x$.

Supposons là vraie au rang n, ainsi au rang $n+1$:

$$\frac{p_{n+1}x_{n+1} + p_n}{q_{n+1}x_{n+1} + q_n} = \frac{\frac{p_n[x_n]+p_{n-1}}{x_n-[x_n]} + p_n}{\frac{q_n[x_n]+q_{n-1}}{x_ny-[x_n]} + q_n} = \frac{(p_nx_n + p_{n-1})}{q_nx_n + q_{n-1}} = x$$

La propriété est héréditaire et vraie au rang 1 donc vraie pour tout n.

e) En utilisant le résultat précédent on trouve :

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_np_nx_n + q_np_{n-1} - (q_nx_n + q_{n-1})p_n}{q_n(q_nx_n + p_{n-1})} = \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n(q_nx_n + p_{n-1})} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n(q_nx_n + p_{n-1})}$$

$$x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{q_{n-1}p_nx_n + q_{n-1}p_{n-1} - (q_nx_n + q_{n-1})p_{n-1}}{q_{n-1}(q_nx_n + p_{n-1})} = \frac{-x_n(p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1})}{q_{n-1}(q_nx_n + p_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}(q_nx_n + p_{n-1})}$$

Les dénominateurs étant strictements positifs il vient que :

$$\begin{cases} \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < x < \frac{p_n}{q_n} \text{ pour n pair} \\ \frac{p_n}{q_n} < x < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \text{ pour n impair} \end{cases}$$

f) Remarquons que $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(q_n x_n + p_{n-1})}$ et $\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_{n-1}(q_n x_n + p_{n-1})}$ car les dénominateurs sont strictements positifs.

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{q_{n-1} - q_n}{q_n q_{n-1}(q_n x_n + p_{n-1})} < 0$$

En effet cette quantité est négative puisque (q_n) est croissante, donc $\left(\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|\right)$ est décroissante.

On a $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(q_n x_n + p_{n-1})}$ et $q_n \leq q_n x_n + p_{n-1}$ donc :

$$\boxed{\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}}$$

Or on a montré que $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} x - \frac{p_n}{q_n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x}$$