Devoir de Mathématiques n°6

Kévin Polisano
MPSI 1

Jeudi 8 novembre 2007

Exercice 1 : Algorithmique

1) On souhaite pouvoir placer un nombre quelconque a dans une liste L de telle sorte que celle-ci soit ordonnée de façon croissante. L'avantage de l'algorithme qui suit est qu'il permet de placer a à partir d'une liste non ordonnée.

```
> Tri :=proc (L,a) local i, j, n, G, M, temp;
  G :=[a,op (L)]; n :=nops (G); M :=G;
      for i from 2 to n do
          j :=i;
             while 1<j and M[j]<M[j + -1] do
                 j :=j-1;
                 temp :=M[j];
                 M[j] :=M[j + 1];
                 M[j + 1] :=temp
             od;
      od;
    M;
  end;
> Tri( [8,-2,7,5] , 4 );

                                   [-2,4,5,7,8]
```

2) L'algorithme suivant génère les n premières lignes du triangle de Pascal.

> Triangle :=**proc**(n : :posint) **local** i,j ;
>
> C :=$(i,j) \to \dfrac{i!}{(i-j)!j!}$;
>
> **for** i **from** 0 **to** n **do**
>
> print(seq(C(i,j),j=0..i)) ;
>
> **od** ;
>
> **end** ;
>
> \> Triangle(5) ;
>
> 1
>
> 1, 1
>
> 1, 2, 1
>
> 1, 3, 3, 1
>
> 1, 4, 6, 4, 1
>
> 1, 5, 10, 10, 5, 1

Exercice 2 : Etude d'un ensemble géométrique

2) Les hypothèses et les notations sont celles de la question précédente. On appelle R le point de coordonnées $(0,1)$, Q le point de coordonnées $(1,1)$. Soit K le pourtour du carré $OPQR$ c'est à dire la réunion des quatre segments $[OP]$, $[PQ]$, $[QR]$ et $[RO]$.

a) Rappelons que $A_t\left(\frac{1+t\sqrt{3}}{2},0\right)$, $B_t\left(0,\frac{\sqrt{3}-t}{2}\right)$ et $C_t\left(1,\frac{\sqrt{3}+t}{2}\right)$.

D'où

$$A_t \in [OP] \Longrightarrow 0 \leq \frac{1+t\sqrt{3}}{2} \leq 1 \Longrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

De même

$$B_t \in [OR] \Longrightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{3}-t}{2} \leq 1 \Longrightarrow \sqrt{3}-2 \leq t \leq \sqrt{3}$$

Et

$$C_t \in [PQ] \Longrightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{3}+t}{2} \leq 1 \Longrightarrow -\sqrt{3} \leq t \leq 2-\sqrt{3}$$

On en déduit la condition suivante :

$$\boxed{\sqrt{3}-2 \leq t \leq 2-\sqrt{3}}$$

On note (I) l'intervalle $[\sqrt{3}-2, 2-\sqrt{3}]$.

b) Pour $t=0$ les points B_t et C_t ont même ordonnée que J et A_t se situe au milieu de $[OP]$.

Appelons B_{t_0}, C_{t_0} et A_{t_0} les points correspondants.

Lorsque t augmente A_t tend vers le point $R = A(t = 2-\sqrt{3})$ en décrivant le segment $A_{t_0}R$ par continuité de la fonction $t \mapsto \frac{1+t\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2-\sqrt{3}]$.

De manière analogue le point B_t décrit $B_{t_0}Q$ et A_t décrit $A_{t_0}N$ avec $N\left(\frac{1+(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Par symétrie on en déduit que lorsque t décrit (I) les points A_t, B_t et C_t décrivent respectivement les segments suivants :

$$\boxed{\begin{array}{c} S_B = [RR'] \text{ avec } R(0,1) \text{ et } R'\left(\sqrt{3}-1, 0\right) \\ S_C = [Q'Q] \text{ avec } Q(1,1) \text{ et } Q'\left(1, \sqrt{3}-1\right) \\ S_A = [NN'] \text{ avec } N\left(\sqrt{3}-1, 0\right) \text{ et } N'\left(2-\sqrt{3}, 0\right) \end{array}}$$

c) Notons $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ l'isobarycentre des points A_t, B_t et C_t pour $t=0$.

Par continuité de la fonction $t \mapsto \frac{3+t\sqrt{3}}{6}$ sur $[0, 2-\sqrt{3}]$ le point M décrit le segment M_0U avec $U\left(\frac{3+(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{6}\right)$ lorsque t augmente.

Par symétrie on en déduit que lorsque t décrit (I) le point M décrit le segment suivant de la droite $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$:

$$\boxed{S_M = [UU'] \text{ avec } U\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ et } U'\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

Nous pouvons en déduire le segment S_M à partir S_A, tout d'abord les points J, M et A_t sont alignés puisque J est le milieu de $[B_tC_t]$.

Si l'on considère les extrémités des segments décrits, nous pouvons tracer le triangle JNN' avec U et U' appartenant respectivement à $[JN]$ et $[JN']$ et tels que $(UU')//(NN')$.

On peut donc appliquer le théorème de thalès, on a :

$$\frac{JU}{JN} = \frac{UU'}{NN'}$$

Or l'isobarycentre, soit le centre de gravité du triangle est situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet correspondant.

On a donc $JU = \frac{1}{3}JN$ d'où :

$$\boxed{NN' = 3UU' \Longleftrightarrow S_A = 3S_M}$$

Il est ensuite aisé de placer S_M sur la droite $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ par symétrie par rapport à M_0.

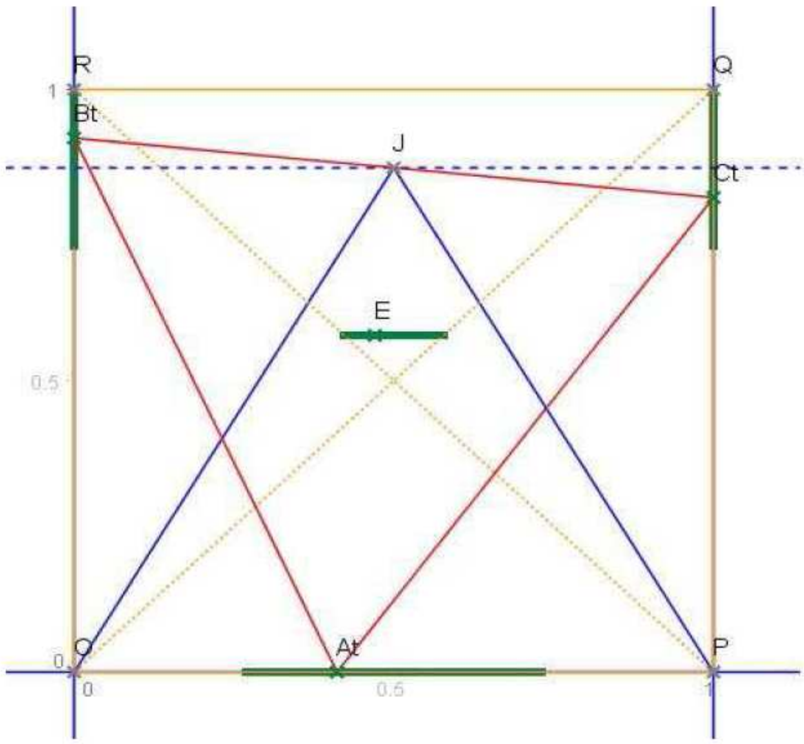
Afin de déterminer les points d'intersections de S_M avec les diagonales de K on précisera l'intersections de la droite $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ avec ces dernières.

La droite support de la diagonale $[RP]$ a pour équation $y = 1 - x$, ainsi le point d'intersection a pour coordonnées $(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ qui n'est autre que le point $U' \in S_M$.

De même la droite support de $[OQ]$ a pour équation $y = x$ et le point d'intersection a pour coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ c'est à dire le point $U \in S_M$.

Les points d'intersections de S_M avec les diagonales de K sont donc U et U'.

d) <u>Schéma</u> :



3) On prend pour L, dans cette question, le pourtour d'un carré quelconque du plan E.

a) Il est clair que si A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans L de côté R, deux de ces points ne peuvent être sur un même côté de L.

En effet au mieux si ces points sont confondus avec deux sommets consécutifs alors le troisième point se situe à une distance $d = \frac{\sqrt{3}}{2}R < R$ du segment joignant les deux premiers points. Ce point serait donc strictement intérieur au carré.

b) On considère alors le pourtour L d'un carré quelconque du plan E et de rayon R. Afin de déterminer L' on se place dans un repère associé au carré, défini comme précédemment, et puisque deux des sommets du triangle équilatéral inscrit ne peuvent être sur un même côté, on se ramène à la configuration de la question 2). Enfin par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du centre du carré on en déduit que l'ensemble L' est un carré de côté S_M.

Problème sur les coniques

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (C) le cercle centré en O et de rayon R, $R > 0$, et par A_1, A_2 et A_3 les points de coordonnées respectives $(R, 0)$, $(0, R)$ et $(-R, 0)$. On désigne par (E) la courbe d'équation : $4x^2 + 5y^2 - 4Ry = 0$

1) Le discriminant associé à l'équation de (E) est $\Delta = 4 \times 5 - 0^2 = 20 > 0$

La courbe (E) est donc une ellipse, déterminons son centre :

On désigne par F l'expression $F(x, y) = 4x^2 + 5y^2 - 4Ry$.

Les coordonnées du centre Ω vérifient le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial F}{dx}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F}{dy}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 8x = 0 \\ 10y - 4R = 0 \end{cases}}$$

On en déduit que l'ellipse a pour centre $\Omega(0, \frac{2R}{5})$.

L'équation cartésienne ne possédant pas de terme en xy il vient que :

Les axes de symétrie de l'ellipse sont parallèles à ceux du repère et passent par Ω.

Déterminons l'équation réduite de (E) dans le repère associé aux axes de symétrie :

$$4x^2 + 5y^2 - 4Ry = 0 \Longleftrightarrow 4x^2 + 5\left(y - \frac{2R}{5}\right)^2 - \frac{4R^2}{5} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{\left(\frac{R}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2R}{5}\right)^2} = 1}$$

On retrouve le résultat précédent.

2) Simplifions l'expression suivante :

$$(4x^2 + 5y^2 - 4Ry) - 4(x^2 + y^2 - R^2) = y^2 - 4Ry + 4R^2 = (y - 2R)^2 \geq 0$$

La seule intersection entre (E) et (C) est possible uniquement pour $y = 2R$. Réinjectons dans l'équation du cercle, on obtient $x^2 = -3R^2$ et on en déduit que (E) et (C) ne se coupent pas. Ainsi deux cas se présentent : soit l'ellipse est incluse à l'intérieur du cercle strictement, soit elle lui est extérieure strictement.

Il suffit alors d'exhiber un point appartenant à (E) et de le situer par rapport au cercle.

Le point $O(0,0)$ appartient à (E) car $4\times 0^2+5\times 0^2-4R\times 0=0$ et appartient à l'intérieur de (C) puisque O est son centre.

Par conséquent l'ellipse est strictement incluse dans le cercle.

3) a) Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=a\cos(\theta) \\ y=b\sin(\theta)\end{array}\right.$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^{2*}$ et θ décrivant $\mathbb{R}$.

Considérons l'équation cartésienne de $(\mathcal{E})$, les points d'intersections avec la droite (D) d'équation $y=mx+m'$ sont donnés par le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx+m'\end{array}\right.$$

En reportant la deuxième ligne dans la première on a la condition d'intersection suivante :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+m')^2}{b^2}=1}$$

Développons cette expression pour aboutir à une équation du second degré :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+m')^2}{b^2}-1 &= \frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2+2mm'x+m'^2}{b^2}-1 \\
&= \frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}+\frac{2mm'x}{b^2}+\frac{m'^2}{b^2}-1 \\
&= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{2mm'}{b^2}\right)x+\left(\frac{m'^2}{b^2}-1\right)
\end{aligned}$$

Il existe une unique solution à l'équation (avec $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}\neq 0$) :
$\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}\right)x^2+\left(\dfrac{2mm'}{b^2}\right)x+\left(\dfrac{m'^2}{b^2}-1\right)=0$ si et seulement si $\Delta=0$.

On a alors :

$$x=\frac{\frac{2mm'}{b^2}}{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)}\iff x\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)=\frac{mm'}{b^2}\iff\boxed{\frac{x}{a^2}+m\frac{mx+m'}{b^2}=0}$$

On en conclut que la droite (D) rencontre $(\mathcal{E})$ en un point unique si et seulement si il existe x réel tel que :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+m')^2}{b^2}=1 \\ \frac{x}{a^2}+m\frac{mx+m'}{b^2}=0\end{array}\right.}$$

Montrons alors que (D) est tangente à $(\mathcal{E})$. Pour cela démontrons au préalable la propriété suivante :

Soit une courbe implicite du plan d'équation cartésienne $f(x,y)=0$ et $M(x_0,y_0)$ un point appartenant à la courbe. Si M est régulier alors la tangente est orthogonale au vecteur $\vec{u}\left(\frac{\partial f}{dx}(x_0), \frac{\partial f}{dy}(y_0)\right)$.

<u>Preuve</u> :

Sur la courbe d'équation $f(x,y)=0$ on peut définir au voisinage de M une fonction φ telle que $y=\varphi(x)$. L'équation s'écrit alors $f(x,\varphi(x))=0$. On dérive alors au point M ce qui donne :

$$\frac{\partial f}{dx}(x_0,\varphi(x_0)) + \varphi'(x_0)\frac{\partial f}{dy}(x_0,\varphi(x_0)) = 0$$

Or $\varphi'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point M d'abscisse x_0. Un vecteur tangent $\vec{v}$ a pour coordonnées $(1,\varphi'(x_0))$ et l'égalité ci-dessus se traduit par $\vec{u}.\vec{v}=0$ ce qui clos la démonstration.

Reprenons le système établissant la condition d'intersection en x_0 de (D) et $(\mathcal{E})$:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_0}{a^2} + m\frac{y_0}{b^2} = 0 \end{cases}$$

C'est la deuxième ligne qui nous intéresse ici. On remarque $\frac{\partial f}{dx}(x_0) = \frac{2x_0}{a^2}$ et $\frac{\partial f}{dy}(x_0) = \frac{2y_0}{b^2}$.

Posons alors $\vec{u}\left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}\right)$.Etant donné que $\frac{x_0}{a^2} + m\frac{y_0}{b^2} = 0$ on a $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v}(1,m)$.

La droite $y = mx + m'$ passe par $M(x_0,y_0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}$ donc est orthogonale à $\vec{u}$, d'après la propriété précédente c'est donc la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.

b) En considérant un repère dont le centre coincide avec celui de l'ellipse et dont les axes sont orientés dans la direction des axes de symétrie, autrement dit un repère dans lequel l'ellipse possède une équation du type $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ on se ramène au cas précédent et on montre que si une droite coupe l'ellipse en un point elle lui est tangente.

En revanche cette propriété n'est plus valable dans le cas de la parabole (il suffit de prendre une droite parallèle à son axe de symétrie), ni dans celui de l'hyperbole (il suffit de prendre une droite parallèle à l'une des asymptotes).

c) Utilisons les questions précédentes pour montrer que les droites d'équation $y = R - x$ et $y = R + x$ sont tangentes à $(\mathcal{E})$.

En effet en réinjectant dans l'équation de $(\mathcal{E})$ on a respectivement :

$4x^2 + 5y^2 - 4Ry = 4x^2 + 5(R-x)^2 - 4R(R-x) = 9x^2 - 6Rx + R^2 = 9(x - \frac{R}{3})^2$

$4x^2 + 5y^2 - 4Ry = 4x^2 + 5(R+x)^2 - 4R(R+x) = 9x^2 + 6Rx + R^2 = 9(x + \frac{R}{3})^2$

Dans les deux cas on obtient un seul point d'intersection avec l'ellipse, donc en vertu de b) ces deux droites sont tangentes respectivement au point $A(\frac{R}{3}, \frac{2R}{3})$ et $B(-\frac{R}{3}, \frac{2R}{3})$.

4) On considère l'arc paramétré défini par :

$$O\vec{M}(t) = R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}\vec{j}\right), t \in \mathbb{R}$$

Remarquons que si l'on pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et θ décrivant l'intervalle $]-\pi, \pi[$ on se ramène à :

$$\boxed{O\vec{M}(t) = R\left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\right)}$$

Il s'agit du cercle (C) privé du point $A_3(\theta = \pi)$

De plus la fonction $\theta \mapsto \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ réalise une bijection de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}$.

Il en advient que l'on définit par l'arc paramétré une bijection de $\mathbb{R}$ sur $(C)\setminus\{A_3\}$.

5) Le point $M(t)$ appartient bien à cette droite dans la mesure où la quantité suivante est nulle : (il en va de même pour $M(u)$ par symétrie des rôles puisqu'on pose $s = t + u$ et $p = tu$) :

$$\boxed{(1-tu)R\frac{1-t^2}{1+t^2} + (t+u)R\frac{2t}{1+t^2} - R(1+tu) = 0}$$

On en déduit que $(1-p)x + sy - R(1+p) = 0$ est une équation de la droite $(M(t)M(u))$.

6) a) L'équation du cercle étant $x^2 + y^2 = R^2$ on a une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et donc également pour (γ) à l'exception du point $A_3(-R, 0)$ d'après la question 4) dont le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et le point $A_1(R, 0)$.

Un point de (γ) et son symétrique peuvent donc être reliés par une droite parallèle à l'axe des abscisses, soit d'après la question 5) uniquement si $p = 1$. Ainsi si $M(t) \in (\gamma)$ et $\widehat{M}(\widehat{t})$ son symétrique orthogonal par rapport à $(0, \vec{j})$ appartient à (γ) alors $\widehat{t}t = 1 \Longleftrightarrow \widehat{t} = \frac{1}{t}$.

En utilisant de nouveau la question 5), en considérant la droite $(\widehat{M}(\widehat{t})M(u))$ passant par le point $A_0(R, 2R)$ il vient :

$$\left(1 - \frac{u}{t}\right)R + \left(u + \frac{1}{t}\right)2R - R\left(1 + \frac{u}{t}\right) = 0$$

On en tire pour $t \neq 1$:

$$\boxed{u = \frac{1}{1-t}}$$

b) En prenant $u = \frac{1}{1-t}$ avec $t \neq 1$ on a pour $p \neq -1$:

$$p = tu = \frac{t}{1-t} \Longleftrightarrow t = \frac{p}{p+1}$$

Ainsi

$$s = t + u = t + \frac{1}{1-t} = \frac{p}{p+1} + (p+1)$$

D'où

$$\boxed{(p+1)s = p^2 + 3p + 1}$$

Reprenons l'équation de la droite $(M(t)M(u))$ et multiplions-la par $(p+1)$:

$$(1-p^2)x + (p^2+3p+1)y - R(p+1)^2 = 0$$

Isolons la variable x :

$$x = \frac{R(p+1)^2 - (p^2+3p+1)y}{1-p^2}$$

Puis afin de déterminer l'intersection avec l'ellipse, réinjectons-la dans l'équation de (E) :

$$4\left(\frac{R(p+1)^2 - (p^2+3p+1)y}{1-p^2}\right)^2 + 5y^2 - 4Ry = 0$$

On obtient une équation du second dont Maple donne une unique solution :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \frac{R(1-p^2)}{3p^2+4p+3} \\ y = \frac{2R(1+p)^2}{3p^2+4p+3} \end{array}\right.}$$

Et remarquons que pour toute valeur de p, $3p^2 + 4p + 3 \neq 0$.

c) Considérons un point $A \in (C)$ de paramètre t. D'après 6)a le point $\widehat{A}$ a pour paramètre $\dfrac{1}{t}$.
De surcroît si on prend A' de paramètre $\frac{1}{1-t}$ alors la droite (AA') est tangente à (E).

Pour construire le point A' on place au préalable le point $\widehat{A}$ symétrique orthogonal de A par rapport à $(O, \vec{j})$ puis on trace la droite $(A_0\widehat{A})$ et l'intersection avec (C) donne A' d'après 6)a.

Réitérons la procédé de construction en partant de A', d'après ce qui a été fait précédemment le point A'' a comme paramètre $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-t}} = \dfrac{t-1}{t}$ avec $(A'A'')$ tangente à (E). Finalement si on construit l'image de A'' par le même procédé on s'aperçoit que son paramètre est $\dfrac{1}{1-\frac{t-1}{t}} = t$ qui n'est autre que le point A et ainsi (AA'') est tangente à (E).

De cette manière les points A, A' et A'' forment un triangle dont les côtés sont tangents à (E).

De même on vérifie pour tout $i \in \{1,2,3\}$ le point A_i donne par ce procédé le triangle $A_1A_2A_3$ dont les côtés sont également tangents à (E).

7) Schéma :