Kévin Polisano
MPSI 1

Lundi 22 octobre 2007

Devoir de Mathématiques n°5

Notes et observations :

Exercice 1 : faisceaux linéaires de plans

1) $\alpha(ax+by+cz+d)+\alpha'(a'x+b'y+c'z+d')=0 \Leftrightarrow (\alpha a+\alpha' a')x+(\alpha b+\alpha' b')y+(\alpha c+\alpha' c')z+(\alpha d+\alpha' d')=0$

Le couple (α,α') décrit $\mathbb{R}^2$, il en va de même pour $\alpha a+\alpha' a$, donc **l'ensemble $F_{p,p'}$ ne dépend pas du choix des coefficients** constants a,b,c,d et a',b',c',d' autrement dit ne dépend pas des équations des plans P et P'.

2) $F'_{p,p'}$: $(ax+by+cz+d) + \lambda(a'x+b'y+c'z+d') = 0$

En prenant $(\alpha,\alpha')=(1,0)$ on a P qui appartient à $F_{p,p'}$, de même avec $(\alpha,\alpha')=(0,1)$ on a P' qui appartient à $F_{p,p'}$.

Ecrivons $F'_{p,p'}$: $(a+\lambda a')x + (b+\lambda b')y + (c+\lambda c')z + (d+\lambda d') = 0$

Il s'agit de la même équation que $F_{p,p'}$ en prenant $(\alpha,\alpha')=(1,\lambda)$. Et λ décrit $\mathbb{R}$ donc il en va de même pour $(a+\lambda a')$ …etc donc $F'_{p,p'}$ contient tous les plans de $F_{p,p'}$ à l'exception de P'.

Pour être plus rigoureux on peut aussi procéder de la sorte :

$\alpha(ax+by+cz+d) + \alpha'(a'x+b'y+c'z+d') = 0 \Leftrightarrow (ax+by+cz+d) + \alpha'/\alpha\,(a'x+b'y+c'z+d')=0$

Avec $\alpha \neq 0$, et en posant $\lambda = \alpha'/\alpha$ on retrouve $F'_{p,p'}$. Montrons à présent que P' n'appartient pas à $F'_{p,p'}$:

En effet puisque $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ pour que $F'_{p,p'}$ contienne P' il faudrait que :

$a+\lambda a' = a' \Leftrightarrow \lambda = 1 - a/a'$
$b+\lambda b' = b' \Leftrightarrow \lambda = 1 - b/b'$
$c+\lambda c' = c' \Leftrightarrow \lambda = 1 - c/c'$
$d+\lambda d' = d' \Leftrightarrow \lambda = 1 - d/d'$

On devrait donc avoir $a/a' = b/b' = c/c' = d/d'$

Il existerait alors un réel k tel que : $a=ka'$, $b=kb'$, $c=kc'$ et $d=kd'$

Ainsi on aurait ax+by+cz+d = k(a'x+b'y+c'z+d') = 0

Les plans P et P' serait alors confondus, ce qui est contraire aux hypothèses.

On en déduit que $F'_{p,p'}$ ne contient pas P'.

En définitive on a montré que $F'_{p,p'} = F_{p,p'} - \{P'\}$

3) On suppose que P et P' se coupent suivant une droite D_0. Afin de montrer que $F_{p,p'}$ est l'ensemble des plans contenant D_0 on procède par <u>double inclusion</u> :

➔ **On montre que D_0 est contenue dans tout plan de $F_{p,p'}$**
🡐 **On montre que tout plan qui contient D_0 est dans $F_{p,p'}$**

➔

D_0 est l'intersection de P et P', donc D_0 appartient à P et à P'.

Puisque D_0 appartient à P elle appartient à αP, de même D_0 appartient à α'P'.

Soit deux plans quelconques A et B, A+B est l'ensemble des {D+D', (D,D') Є PxP'}

En particulier en prenant D'=0 (droite vectorielle nulle) on a D qui appartient à A+B.

Ainsi D_0 appartenant à αP et α'P', elle appartient à αP+α'P' donc est contenue dans tout plan de $F_{p,p'}$.

🡐

Il s'agit de montrer que si un plan Q contient D_0 alors Q est dans $F_{p,p'}$.

Soit M un point de Q extérieur à D_0, remarquons que le plan X d'équation :

X : **P'(M).P(x,y,z) – P(M).P'(x,y,z) = 0**

- Appartient à l'ensemble $F_{p,p'}$ car de la forme αP + α'P' avec α=P'(M) et α'=-P(M)
- Contient D_0 puisque appartenant à $F_{p,p}$' en vertu de ➔
- Passe par le point M car P'(M).P(M) – P(M).P'(M) = 0

Le plan X passe par M et D_0 donc il s'agit du plan Q, X=Q.

Ainsi Q appartient bien à $F_{p,p'}$.

CQFD.

(Très beau résultat !)

<u>Exemple</u> : former une équation cartésienne du plan ∏ passant par A(1,-1,2) et contenant la droite D intersection de x-y+z-5=0 et 2x+y+z-2=0.

En utilisant la relation précédente on peut déduire directement l'équation du plan $\prod$:

En effet en notant P et P' respectivement les plans d'équations :

$x-y+z-5 = 0$ et $2x+y+z-2=0$ on a :

$P'(A) = 2*(1) + (-1) + (2) – 2 = 1$ et $P(A) = 1 – (-1) + 2 – 5 = -1$

Ainsi $P'(A)P(x,y,z) – P(A)P'(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow P(x,y,z) + P'(x,y,z) = 0$

Soit finalement $\mathbf{3x + 2z – 7 = 0}$

Vérifions cette équation par la <u>méthode traditionnelle</u> :

Le point A n'appartient pas à D, donc en prenant deux autres points B et C de D on obtient deux vecteurs AB et AC directeurs du plan contenant A et D.

Fixons z=0, alors on résout le système :

$2x + y – 2 = 0$
$2x – 2y – 10 = 0$

Par soustraction on obtient $3y = -8 \Rightarrow y = -8/3$ et $x = 7/3$

On trouve donc le point B(7/3,-8/3,0).

Fixons maintenant y=0 alors on résout le système :

$x+z-5 = 0$
$2x+z-2 = 0$

D'où $x = -3$ et $z = 8$ donc on trouve le point C(-3,0,8).

AB(4/3,-5/3,-2) et AC(-4,1,6) sont vecteurs directeurs de $\prod$

Un vecteur normal au plan $\prod$ est donc AB ^ AC (-8,0,-16/3)

$\prod : -24x –16z + d = 0$

A appartient au plan donc : $d = 56$

Donc $\prod$: 3x + 2z – 7 = 0

4) Si P et P' sont parallèles alors leurs coefficients sont proportionnels.

Il existe alors k tel que $a' = ka$, $b' = kb$ et $c' = kc$.

Donc les plans de $F_{p,p'}$ ont pour équation :

$\alpha(ax+by+cz+d) + \alpha'(kax+kbx+kcx+d') = 0$

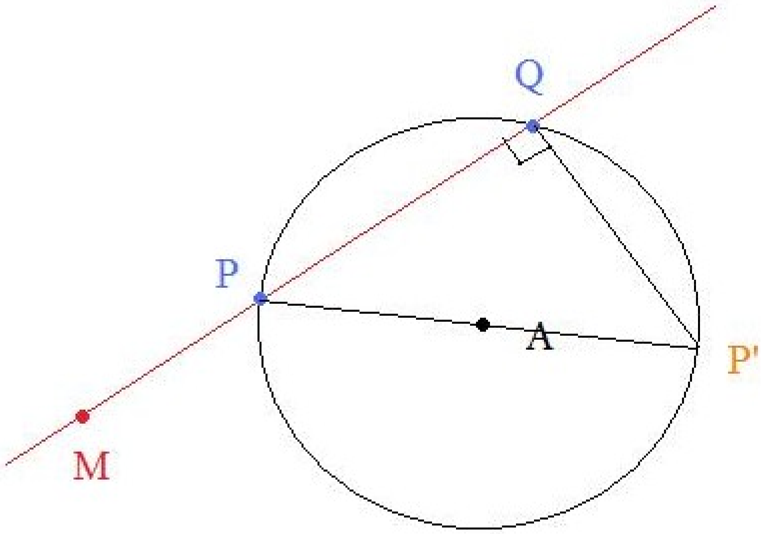
$x(a\alpha + \alpha'ka) + y(b\alpha + \alpha'kb) + z(c\alpha + \alpha'kc) + (\alpha d+\alpha'd') = 0$

$(\alpha+\alpha'k)[ax+by+cz] + (\alpha d+\alpha'd') = 0$

Il vient que **$F_{p,p'}$ est l'ensemble des plans parallèles à P**. (raisonnement analogue pour P').

Exercice 2 : puissance d'un point par rapport à un cercle, faisceau de cercles

1) Schéma :



On définit P' comme le point diamétralement opposé à P. [PP'] est donc un diamètre de C(A,R), par conséquent le triangle PQP' est rectangle en Q.

Les points M, P et Q sont sur la sécante (D), ainsi Q et le projeté orthogonal de P' sur (MQ). On a donc l'égalité : MP.MQ = MP.MP'=(MA+AP).(MA+AP'). Or -AP = AP' par définition du point P' d'où :

$MP.MQ = MA^2 - AP^2$

P étant sur le cercle, [AP] est un rayon de celui-ci donc :

$MP.MQ = MA^2 - R^2$

2) Soit deux cercles $C_1 = C(A_1,R_1)$ et $C_2 = C(A_2,R_2)$ avec A_1 et A_2 distincts.

$P_{C1} = P_{C2} \Leftrightarrow MA_1^2 - R_1^2 = MA_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow (MA_1-MA_2).(MA_1+MA_2) = R_1^2-R_2^2$

Introduisons le point I milieu de $[A_1A_2]$:

$(MA_1+A_2M).(MI+IA_1+MI+IA_2) = R_1^2-R_2^2$

D'où $2MI.(MA_1+A_2M) = R_1^2-R_2^2$ car $IA_1 = - IA_2$ c'est-à-dire $2MI.A_2A_1 = R_1^2-R_2^2$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (A_2A_1) on a alors $2HI.A_2A_1 = R_1^2-R_2^2$

L'ensemble des points M ayant même projeté H sur (A_2A_1) est une droite orthogonale à (A_1A_2) appelée l'axe radical des cercles C_1 et C_2.

3) Dans le repère considéré on a :

(C_1) : $(x-a_1)^2 + (y-0)^2 = R_1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2a_1x +b_1 = 0$ avec $b_1 = a_1^2-R_1^2$
(C_2) : $(x-a_2)^2 + (y-0)^2 = R_2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2a_2x + b_2 = 0$ avec $b_2 = a_2^2 - R_2^2$

Et $b_1=b_2$ car $MA_1^2-R_1^2 = MA_2^2 - R_2^2$ pour tout M de O_y.
Remarquons que si M appartient à (C_1) alors $MA_1^2-R_1^2=0$, de même si M appartient à (C_2) alors $MA_2^2-R_2^2=0$ donc la condition d'intersection se traduit par $MA_1^2-R_1^2 = MA_2^2-R_2^2 \Leftrightarrow P_{C1}(M) = P_{C2}(M)$ c'est-à-dire M appartient à Δ. Ainsi (C_1) et (C_2) sont sécants si et seulement si (C_1) et Δ sont sécants (respectivement (C_2) et Δ). On a le système suivant :

$x^2 + y^2 - 2a_1x + b = 0$
$y = 0$

Par conséquent les points d'intersections sont donnés par :

$x^2 - 2a_1x + b = 0$ (E)

Les cercles sont sécants si et seulement si (E) possède deux racines réelles distinctes, sécants si (E) possède une racine double et d'intersection vide si (E) ne possède pas de racine réelle.

4) Afin que C(A,R) et $C(A_1,R_1)$ aient pour axe radical Δ il faut et il suffit que A soit situé sur O_x et que C(A,R) passe par les points d'intersections de C_1 et C_2. Les cercles C(A,R) forment un faisceau. Si b<0 c'est-à-dire si $a_1^2<R_1^2$ on est dans le cas où tous ces cercles passent par U et V points d'intersections de C_1 et C_2. Si b=0 c'est-à-dire si $a_1^2=R_1^2$ on a un point de tangence W entre les deux cercles, et donc tous les cercles C(A,R) passent par ce point. Enfin dans le cas b>0 c'est-à-dire $a_1^2>R_1^2$ soit lorsqu'il y a aucune intersection, je n'ai pas trouvé.

5) Soit X un des deux points d'intersections de C(A,R) et C(A',R') (on est dans une configuration symétrique), puisque leur tangente sont perpendiculaires en X le triangle AA'X est rectangle en X. Donc d'après le théorème de Pythagore : $AA'^2 = AX^2+A'X^2$. Or X étant un point d'intersection il appartient à la fois à C(A,R) et C(A',R') donc AX=R et A'X=R', d'où la relation $AA'^2=R^2+R'^2$.
Réciproquement si C(A,R) et C'(A',R') sont sécants et vérifient cette relation alors ils sont orthogonaux.

6) Les cercles orthogonaux à $C(A_1,R_1)$ et $C(A_2,R_2)$ ont leur centre situés sur l'axe radical de $C(A_1,R_1)$ et $C(A_2,R_2)$. En déterminant un cercle orthogonal C à ces deux cercles, et en notant A et B l'intersection du C avec O_x alors tous les cercles orthogonaux passent par ses deux points. Ils forment ainsi un faisceau de cercles orthogonaux.

Exercice 3 : théorème de Descartes

1) Une méthode simple consiste à sa placer dans le repère orthogonal (O,OC,OB,OA) on a :

A(0,0,a) ; B(0,b,0) ; C(c,0,0)

Ainsi AB(0,b,-a) et AC(c,0,-a)

D'où AB ^ AC = w(-ab,-ac,-bc)

Et $||AB \wedge AC|| = ||w|| = rac(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

Or l'aire d'un triangle construit sur AB et AC est : $S = \frac{1}{2} || AB \wedge AC ||$

Donc $S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

Et par ailleurs $AOB^2 + AOC^2 + OBC^2 = (1/2ab)^2 + (1/2ac)^2 + (1/2bc)^2 = \mathbf{\frac{1}{4}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}$

D'où l'égalité.

2) Puisque l'énoncé suggère d'utiliser les produits vectoriels, une méthode rapide consiste à écrire :

AB^AC = (OB-OA)^(OC-OA) = OB^OC –OB^OA-OA^OC +OA^OA par bilinéarité.

Puis par antisymétrie et sachant que OA^OA = 1 il vient :

AB^AC = OA^OB + OB^OC + OC^OA

Et ces trois vecteurs sont respectivement colinéaires à OC, OA et OB qui sont orthogonaux entre eux deux à deux.

On peut alors utiliser le théorème de Pythagore en dimension 3.

En effet pour trois vecteurs u, v et w orthogonaux deux à deux on a :

$||u+v+w||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + ||w||^2 + 2(u.v + u.w + v.w)$

Les produits scalaires sont alors nuls et on a $||u+v+w||^2 = ||u||^2+||v||^2+||w||^2$

<u>Remarque</u> : la réciproque est fausse pour des dimensions supérieures ou égales à 3.

Donc $\mathbf{||AB \wedge AC||^2 = ||OA \wedge OB||^2 + ||OB \wedge OC||^2 + ||OC \wedge OA||^2}$

Ce qui prouve le théorème de Descartes.

Utilisons les pistes de l'énoncé :

Dans le triangle ABC de côté α, β et γ l'aire peut s'exprimer par :

$S = 1/2\alpha\beta\sin(\theta)$

Elevons au carré cette égalité :

$S^2 = ¼(\alpha\beta)^2\sin^2(\theta)$
$S^2 = ¼(\alpha\beta)^2[1-\cos^2(\theta)]$
$S^2 = ¼(\alpha\beta)^2[(1-\cos(\theta))(1+\cos(\theta))]$

Or d'après Al-Kashi on a $\cos(\theta) = (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)/2\alpha\beta$ d'où :

$S^2 = ¼(\alpha\beta)^2[(1 + (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)/2\alpha\beta)(1 - (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)/2\alpha\beta)]$
$S^2 = 1/16[(\alpha+\beta)^2 -\gamma^2][\gamma^2 - (\alpha-\beta)^2]$
$16S^2 = (\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$

Un développement brutal aboutit à la forme voulue :

$16S^2 = 2(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2) - \alpha^4-\beta^4-\gamma^4$

Puis sachant que $\alpha^2 = b^2+c^2$, $\beta^2 = a^2+c^2$, $\gamma^2 = a^2+b^2$ et en réinjectant dans le membre de droite on retrouve après développement :

$\mathbf{S^2 = ¼(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)}$

3) Soit H le projeté orthogonal commun de O et de A sur la droite (BC).

On a $S = 1/2AH*BC \Leftrightarrow S^2 = ¼\ AH^2BC^2$

Il s'agit donc de montrer que $AH^2*BC^2 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$

$AH^2*BC^2 = AH^2*(b^2+c^2) = (a^2+OH^2)*(b^2+c^2)$

En effet AOH est rectangle en O, puisque (OH) est contenue dans le plan (OBC) et OA orthogonal à BC, donc OA orthogonal à OH.

D'où $AH^2*BC^2 = a^2(b^2+c^2) + OH^2(b^2+c^2)$

Or $Aire(OBC)^2 = 1/4BC^2*OH^2 = 1/4b^2c^2$

Donc $OH^2 = b^2c^2/BC^2 = b^2c^2/(b^2+c^2)$ d'où :

$AH^2*BC^2 = a^2(b^2+c^2) + b^2c^2 = \mathbf{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$

CQFD.

4) Considérons le repère orthonormal ayant O pour origine, et une base dont les vecteurs unitaires sont colinéaires de même sens à OA, OB et OC.

Dans ce repère on a : A(a,0,0) ; B(0,b,0) ; C(0,0,c)

D’où AB(-a,b,0) et AC(-a,0,c) sont vecteurs directeurs du plan (ABC)

Donc AB ^ AC (bc,ac,ab) est vecteur normal de (ABC).

Son équation cartésienne est alors : bc.x + ac.y + ab.z + d = 0

Puisque A appartient à ce plan on a : bc*a + ac*0 + ab*0 + d = 0 $\rightarrow$ d = -abc

Ainsi l’équation de plan s’écrit : bc.x + ac.y + ab.z = abc

Soit encore en divisant par abc : x/a + y/b + z/c = 1

En appliquant la formule de distance d’un point à un plan, on trouve que l’origine O(0,0,0) est à une distance D de (ABC) telle que :

$D = 1 / \mathrm{rac}(1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2)$

Or le volume d’une pyramide de surface S et de hauteur D est donné par :

V = 1/3 D * S

Par ailleurs on a aussi V = 1/3.OA.Aire(OBC) = 1/3.a.1/2bc = 1/6 abc donc :

$S = 3V/D = abc/2 * 1/D = abc/2 * \mathrm{rac}(1/a^2+1/b^2+1/c^2) = abc/2 * \mathrm{rac}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2 / a^2b^2c^2)$

$S = ½\ \mathrm{rac}(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)$ $\rightarrow$ **$S^2 = ¼(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)$**

D’où le résultat.