Kévin Polisano
MPSI 1

Lundi 8 octobre 2007

Devoir de Mathématiques n°4

Observations :

Exercice 1 : une équation différentielle non linéaire

a) On a $y' = a|y| \geq 0$ car $a>0$ et la valeur absolue est toujours positive ou nulle. Ainsi si f est solution de cette équation (E) sur |R alors elle est croissante sur |R.

b) On suppose qu'il existe xo élément de |R tel que f(xo)>0. Montrons par l'absurde que f>0.

Supposons que f ne soit pas strictement positive sur |R, elle possède alors une valeur négative et une valeur positive f(xo), donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires f s'annule sur |R. Appelons x1 la valeur pour laquelle f s'annule.

Puisque f est croissante et s'annule en x1 alors f est positive sur [x1,+oo[et donc l'équation (E) s'écrit y' = ay sur cet intervalle. Les solutions de cette équation sont les fonctions f : x → C.exp(-ax). Or f(x1) = 0 donc C.exp(-ax1) = 0 ⇔ C=0 car l'exponentielle ne s'annule pas sur |R. Et par conséquent f est identiquement nulle sur |R, ce qui est absurde dans la mesure où il existe xo tel que f(xo)>0.

On en conclut que pour tout x réel f(x)>0.

c) On suppose qu'il existe xo élément de |R tel que f(xo)<0. Montrons par l'absurde que f<0.

Tout d'abord remarquons que x<xo => f(x)<f(xo)<0 par croissance donc sur]-oo,xo] on a bien f<0.

Supposons que f ne soit pas strictement négative sur |R, elle possède alors une valeur positive et une valeur négative f(xo), donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires f s'annule sur |R. Appelons x1 la valeur pour laquelle f s'annule (x1>xo).

Puisque f est croissante et s'annule en x1 alors f est négative sur]-oo,x1] et donc l'équation (E) s'écrit y' = -ay sur cet intervalle. Les solutions de cette équation sont les fonctions f : x → C.exp(ax). Or f(x1) = 0 donc C.exp(ax1) = 0 ⇔ C=0 car l'exponentielle ne s'annule pas sur |R. Et par conséquent f est identiquement nulle sur |R, ce qui est absurde dans la mesure où il existe xo tel que f(xo)<0.

On en conclut que pour tout x réel f(x)<0

d) En vertu de b) et c) on peut affirmer qu'outre la fonction nulle, une fonction vérifiant l'équation différentielle y' = a|y| est de signe constant sur |R. Ainsi soit elle est positive et alors l'ensemble des solutions est Sp = { x → C.exp(-ax), C dans |R } soit elle est négative et alors l'ensemble des solutions est Sn = { x → C'.exp(ax), C' dans |R}.

Exercice 2 : équation différentielle d'Euler

a) On pose z(x) = y(e^x) avec x>0. Les dérivées première et seconde s'écrivent :

z'(x) = e^(x)y'(e^x) = ty'(t)

z''(x) = e^(x)y'(e^x) + e^(2x)y''(e^x) = ty'(t) + t^2y''(t)

L'équation (E) s'écrit alors comme une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

az''(x) + (b-a)z'(x) + cz(x) = f(e^x) (on a évidemment l'équivalence en rédeveloppant)

b) t^2y'' + ty' + y = cos(2ln(t)) pour t>0

En utilisant le résultat établit à la question précédente on se ramène à l'équation :

z''(x) + z(x) = cos(2x) (E')

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est :

SH = { x → Acos(x) + Bsin(x), A et B réels }

On cherche alors une solution particulière de (E').

w''(x) + w(x) = e^{2ix} (L)

Si wo est solution de (L) alors Re(wo) est solution de (E').

Comme 2 n'est pas racine de r^2+1=0 on pose wo = aoe^(2ix)

wo'' = -4aoe^(i2x)

wo''+wo = e^(2ix) ⇔ e^(2ix)[-3ao] = e^(2ix) ⇔ ao = -1/3

D'où zo = -1/3cos(2x)

L'ensemble des solutions de (E') est donc :

SE' = { x → Acos(x) + Bsin(x) – 1/3cos(2x), (A,B) dans $|R^2$ }

On en déduit les solutions de (E) :

SE = { x → Acos(ln(t)) + Bsin(ln(t)) – 1/3cos(2ln(t)), (A,B) dans $|R^2$ }

c) Afin de résoudre l'équation $t^2y''-2ty'+2y = 2t^3\sin(2t)$ il n'est pas nécessaire d'établir un changement de variable.

En effet on remarque une solution évidente à l'équation homogène :

Les fonctions identité et carrée forment une base, $f(t)=t$, $f'(t)=1$, $f''(t)=0$ et $g(t)=t^2$, $g'(t)=2t$, $g''(t)=2$.

On vérifie que $t^2f''(t) – 2t.f'(t) + 2f(t) = t^2*0 – 2t + 2t = 0$

De même $t^2g''(t) – 2tg'(t) + 2g(t) = 2t^2 - 4t^2 + 2t^2 = 0$.

Cherchons alors une solution particulière de l'équation.

Ecrivons au préalable l'équation sous la forme : $y'' – 2/t * y' + 2/t^2 * y = 2t\cdot\sin(2t)$

On cherche une solution sous la forme z(t)=aotsin(2t) avec ao constante.

$z'(t) = ao.\sin(2t) + 2ao.t.\cos(2t)$

$z''(t) = 2ao.\cos(2t) + 2ao.\cos(2t) – 4ao.t\sin(2t) = 4a\cos(2t) -4ao.t\sin(2t)$

Ainsi en réinjectant dans l'équation :

$t^2[4a\cos(2t)-4aot.\sin(2t)] -2t[ao.\sin(2t)+2ao.t.\cos(2t)] + 2ao.t\sin(2t) = 2t^3\sin(2t)$

$\Leftrightarrow$ $-4ao.t^3.\sin(2t) = 2t^3\sin(2t)$

On en tire ao = -1/2 et donc $t \rightarrow -1/2t.\sin(2t)$ est solution particulière.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$S = \{ t \rightarrow At + At^2 - 1/2t\sin(2t), (A,B) \text{ dans } |R^2 \}$

<u>Problème</u>

Q1 – a) On fixe b=1, $f_a(x) = a/(1+x^2) = ae^{-\ln(1+x^2)}$

$x \rightarrow -\ln(1+x^2)$ est une primitive de $x \rightarrow - 2x/(1+x^2)$ donc $x \rightarrow f_a(x)$ sont solutions de :

$y' = -2x/(1+x^2)*y$

b) $f_{a,b}(x) = a/(1+(bx)^2) = ae^{-\ln(1+(bx)^2)}$

Les functions $x \rightarrow f_{a,b}(x)$ sont solutions de $y'=-2bx/(1+(bx)^2)y$

Q2 – a) On fixe a=1. Pour x>0 :

a1) $y = a/(1+(bx)^2) \Leftrightarrow y(1+(bx)^2) = a \Leftrightarrow y + b^2x^2y = a \Leftrightarrow x^2 = (a-y)/(b^2y) = a/(b^2y) - 1/b^2$

$x^2 = 1/b^2[a/y - 1] \Leftrightarrow x = 1/b * \mathrm{rac}(a/y - 1) = B*g(y)$ avec $B=1/b$ et $g(y)=\mathrm{rac}(a/y -1)$

Pour a=1 $g(y) = \mathrm{rac}(1/y - 1)$

Pour que la racine existe il faut que $1/y \geq 1 \Leftrightarrow y$ dans]0,1]

a2) La racine n'étant pas dérivable en 0 on se place sur]0,1[.

Ecrivons $Bg(y) = B\exp[\ \ln(\mathrm{rac}(1/y-1))\ ]$ et $\ln(\mathrm{rac}(1/y - 1)) = 1/2\ln(1/y - 1)$

La dérivée de ce log est : $1/2*(-1/y^2)/(1/y -1) = -1 / 2y^2(1/y -1) = 1 /(2y^2-2y) = ½* 1/(y^2-y)$

L'équation différentielle $z' = 1/2(y^2-y) * z = 1/2y(y-1) * z$ a donc pour solutions Bg avec B décrivant |R.

a3) On en déduit que l'équation différentielle $2y(x)^2 - 2y(x) - xy'(x) = 0$ (S) admet pour solutions les fonctions $f_{1,b}$ quand b parcours |R.

On se propose de vérifier ce résultat :

On suppose que les fonctions vérifiant cette équation sont strictement positive sur |R, ainsi :

$y'(x) + 2/x*y(x) = 2/x * y(x)^2$

$\Leftrightarrow y'(x)/y^2(x) + 2/x * 1/y(x) = 2/x$

On pose $u(x) = 1/y(x)$ on obtient :

$-u'(x) + 2/x * u(x) = 2/x$

L'équation homogène sous forme résolue s'écrit :

$u'(x) = 2/x * u(x)$

Une primitive de $x \rightarrow 2/x$ est $x \rightarrow 2\ln(x) = \ln(x^2)$

Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation est :

SH = { $x \rightarrow B.x^2$, B dans |R+ }

On remarque ensuite que la fonction constante égale à 1 est une solution particulière de l'équation, donc l'ensemble des solutions de celle-ci est :

S' = { $x \rightarrow 1+Bx^2$, B dans |R+ }

Et comme $u(x) = 1/y(x) \Leftrightarrow y(x) = 1/u(x)$ on en déduit que l'ensemble des solutions de (S) est

S = { $x \rightarrow 1/(1+Bx^2)$, B dans R+ }

En posant $B = b^2$ avec b qui balaye |R on retrouve bien les fonctions $f_{1,b}$.

Une telle équation est dite de Bernoulli.

b) On montre de même que l'équation $2/a*y^2 - 2y – xy' = 0$ a pour solutions les fonctions $f_{a,b}$ avec b parcourant |R.