Kévin Polisano
MPSI 1

Lundi 17 Septembre 2007

Devoir de Mathématiques n°2

Observations :

Exercice 1 : propriété du polygone régulier

On assigne à chaque point son affixe en minuscule et on note z/ le conjugué de z

$MA1^2 = |m-a1|^2 = (m-a1)(m-a1)/ = (m-a1)(m/ - a1/) = |m|^2+|a1|^2-a1.m/-m.a1/$

Notons $S = MA1^2 + \ldots + MAn^2$ ainsi :

$S = n.|m|^2 + (|a1|^2+\ldots+|an|^2) - m/(a1+\ldots+an) - m(a1+\ldots+an)/$

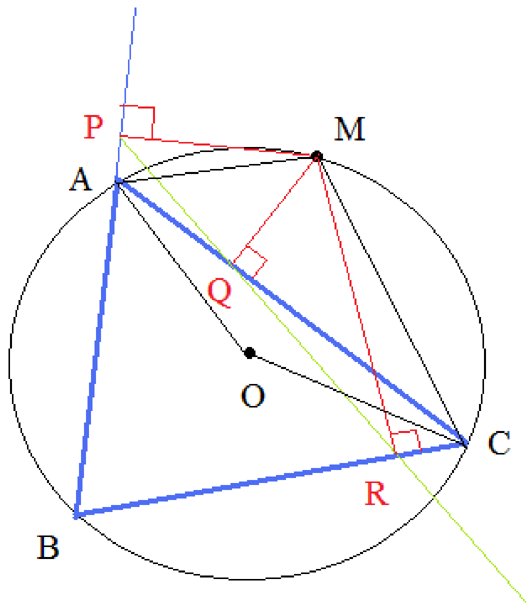
Les racines nièmes d'un nombre complexe forment un polygone régulier inscrit dans un cercle. On en convient que a1,…,an sont les racines nièmes d'un complexe et forment le polygone régulier considéré (possible car le problème est invariant par rotation autour de l'origine correspondant au centre du cercle de rayon R). La somme des racines nièmes étant nulle on obtient :

$S = n.|m|^2 + |a1|^2+\ldots+|an|^2$

Et comme les points A1,…An et M sont situés sur le cercle de rayon R on en conclut que :

$S = 2nR^2$ qui est indépendant du point M.

Exercice 2 : un lieu géométrique classique



Une démonstration simple s'appuyant sur les angles :

Considérons tout d'abord le quadrilatère APMQ. Par construction des points P et Q, les triangles AMQ et APM sont rectangles respectivement en Q et P. Par conséquent ces triangles sont inscrits dans le cercle de diamètre [AM] donc le quadrilatère APMQ est inscriptible, les points A, P, M et Q sont cocycliques.

Puis les angles AQP et AMQ interceptent le même arc de cercle donc sont égaux. De manière analogue on prouve que l'angle RQC = RMC.

On montre alors que les angles PMR et PBR sont supplémentaires :

PMR = 180 – RPM – PRM = 180 – (90-BPR) – (90-BRP) = BPR + BRP = 180-PBR. D'où PMR + PBR = 180°.

Par ailleurs on a clairement ABC = 1/2AOC(aigu) puisque ces angles interceptent le même arc de cercles, et AMC = 1/2AOC(aigu). Donc ABC+AMC = ½*360 = 180°, ils sont également supplémentaires.

On a PBC = PBR = ABC car P sur (AB) et R sur (BC)

D'après ce qui précède ABC est supplémentaire à AMC et PMR donc AMC = PMR. C'est-à-dire PMA + AMR = AMR + RMC.

Or PMA = PQA et RMC = RQC donc PQA = RQC

Enfin comme les points A, Q et C sont alignés on a :

AQC = 180
PQA + PQC = 180
RQC + PQC = 180
PQR = 180

Donc P, Q et R sont alignés. CQFD.

Exercice 3 : une somme trigonométrique et une somme hyperbolique

Dans les deux sommes à évaluer, on utilise les formules d’Euler.

Sin((k+1)a) = (e^(i(k+1)a) – e^(-i(k+1)a))/2i = 1/(2i) * [e^(ia)(e^(ia))^k-e^(-ia)(e^(-ia)^k)]

Puis on somme :

S = 1/(2i) * [e^(ia).Sum(k=0..n)C(n^k)e^(ia)^k - e^(-ia)Sum(k=0..n)C(n^k)e^(-ia)]

On effectue le changement d’indice k’=n-k et sachant que C(n^k) = C(n^(n-k)) on a :

S = 1/(2i) * [e^(ia)Sum(k=0..n)C(n^k)1^(n-k).e^(ia)^k - e^(-ia)Sum(k=0..n)C(n^k)1^k.e^(-ia)^(n-k)

Et d’après le binôme de Newton :

S = 1/(2i) * [e^(ia)(1+e^(ia))^n - e^(-ia)(1+e^(-ia))^n]

En utilisant la meme méthode pour S’ = Sum(k=0..n)C(n^k)sh(a+kb) on obtient :

S’ = (e^a)/2 * [(1+e^b)^n – (1+e^(-b))^n]

Exercice 4 : droite d’Euler, cercle d’Euler d’un triangle

1) G est le centre de gravité de A1A2A3 soit l’isobarycentre de ces points d’où :

G = (a1+a2+a3)/3 et comme H = a1+a2+a3 alors OH = 3OG (en vecteurs).

2) Soit W’ d’affixe w’ = h/2. W’ est le milieu de [OH].

W’M1 = | (a2+a3)/2 – h/2 | = |a1|/2 = ½ (car A1 sur le cercle circonscrit de centre O)

De même W’M2 = W’M3 = ½ ainsi W’ est le centre du cercle circonscrit à M1M2M3 de rayon ½ d’où W=W’ et on a démontré que w = (a1+a2+a3)/2. Il en découle OW = 1/2OH.

3) a) Considérons un triangle ABC et H son orthocentre. Soit H’ le symétrique de H par rapport à (BC). En angles de droites :

(BH’,BC) = (BC,BH) = (AH’,AC) [pi]

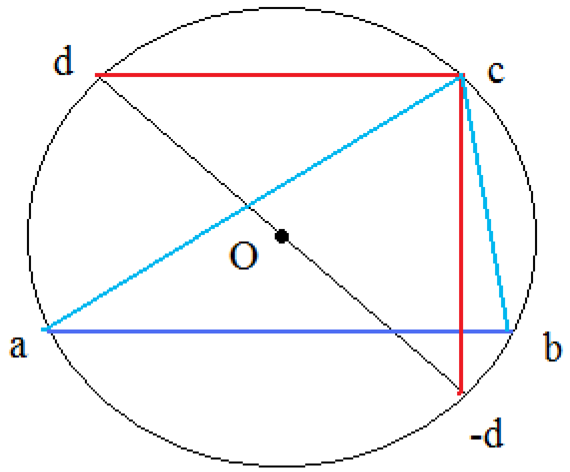
En effet soit I milieu de [HH’] et J projeté orthogonal de B sur (AC) alors :

BHU = AHJ (en angles) et comme les triangles BIH et AHJ sont rectangles respectivement en I et J on a la deuxième égalité.

(BH’,BC)=(AH’,AC) [pi] entraîne que B, A, C et H’ sont cocycliques.

b) Soit (ab) et (cd) deux cordes parallèles du cercle unité. Alors les arcs de cercles entre ces deux parallèles ont même mesure. En utilisant l’écriture complexe d’une rotation de centre O et d’angle t on a :

c = e^(it)b et a = e^(it)d donc c/b = a/d = e^(it). D’où ab = cd.



Ainsi la perpendiculaire issue de c à (ab) rencontre le cercle en –d = -ab/c.

Revenons au problème initial :

On cherche à calculer l’affixe k1 de K1 pied de la perpendiculaire abaissée de A1 sur la droite (A2A3). On a vu précédemment que le symétrique de l’orthocentre H par rapport à (A2A3) appartient au cercle trigonométrique et vu ci-dessus que son affixe est h’ = -a3a2/a1.

On a donc K1 milieu de [HH’] et on en déduit : k1 = 1/2(a1+a2+a3 – a3a2/a1)

c) WK1 = |k1-w| = |-1/2*a3a2/a1| = ½ (car A3, A2 et A1 appartiennent au cercle unité)

Donc K1 appartient au cercle (y) circonscrit de M1M2M3.

d) En appliquant le même procédé aux deux autres pieds K2 et K3 on en conclut que (y) passe par les pieds K1, K2 et K3 des hauteurs du triangle A1A2A3.

4) Déjà traité précédemment. Le rayon du cercle d’Euler est la moitié de celui du cercle circonscrit.

5) p1 = (h+a1)/2 donc WP1 = |p1-w| = | (h+a1)/2 – h/2 | = ½ et ainsi P1 appartient à (y)

De même pour P1 et P2, donc on en conclut que le cercle d'Euler passe par neuf points :

Les milieux des côtés du triangle A1A2A3, le pied de ses hauteurs, et le milieu de [A1H], [A2H] et [A3H].