Devoir de Mathématiques n°19

Kévin Polisano
MPSI 1

Vendredi 30 Mai 2008

Exercice 1

Énoncé :

Soit n un entier et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients dans le corps K.

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \widetilde{P}(k) = a_n . n!$$

Considérons la fraction rationnelle suivante :

$$S(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

avec $Q(X) = \prod_{j=0}^{n} (X - j)$.

En effet $\deg(Q) = n + 1 > n = \deg(P)$ donc $\deg(S) < 0$.

De plus Q est scindé à racines simples donc la décomposition en éléments simples de S est :

$$S(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P}(k)}{\widetilde{Q}'(k)(X - k)}$$

Dérivons Q :

$$Q'(X) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j \neq i}^{n} (X - j)$$

On évalue Q en k, donc tous les produits s'annulent sauf un :

$$\widetilde{Q}'(k) = \prod_{j \neq k}^{n} (k - j)$$

En développant ce produit on remarque que :

$$\widetilde{Q}'(k) = (-1)^{n-k} k!(n - k)!$$

Et on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Longleftrightarrow k!(n-k)! = \frac{n!}{\binom{n}{k}}$$

Revenons à l'expression initiale :

$$S(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{X-k}$$

avec :

$$\alpha_k = \frac{\widetilde{P}(k)}{\widetilde{Q}'(k)} = \frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}\widetilde{P}(k)$$

$\frac{XP(X)}{Q(X)}$ est le quotient de polynômes de même degré, et Q est unitaire, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xP(x)}{Q(x)} = a_n$$

Par ailleurs on a :

$$\frac{XP(X)}{Q(X)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k X}{X-k} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_k x}{x-k} = \alpha_k$$

Par unicité de la limite on en déduit $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = a_n$ d'où finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\widetilde{P}(k) = a_n.n!}$$

Exercice 2

Énoncé :

Étant donné un entier naturel non nul n, on note $\alpha = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

Déterminer deux polynômes P et Q premiers entre eux tels que :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(X-\alpha^p)^2}$$

⋆ Une réduction au même dénominateur donne immédiatement :

$$\boxed{Q(X) = \left(\prod_{p=1}^{n}(X-\alpha^p)\right)^2}$$

⋆ La décomposition nous impose :

$$\boxed{\deg(P) \leq \deg(Q) \Longrightarrow \deg(P) \leq 2n}$$

⋆ On remarque sur un terme quelconque de la somme que :

$$\frac{1}{(\alpha X - \alpha^p)^2} \times \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{[\alpha(X - \alpha^{p-1})]^2} = \frac{1}{X - \alpha^{p-1}}$$

On effectue le changement de variable $p' = p - 1$ et puisque $\alpha^0 = \alpha^n = 1$ on a bien :

$$\boxed{\alpha^2 F(\alpha X) = F(X)}$$

On voit également que :

$$\alpha^2 Q(\alpha X) = \alpha^2 \left(\prod_{p=1}^{n} (\alpha X - \alpha^p) \right)^2 = \underbrace{\alpha^{2n}}_{=1} \left(\prod_{p=1}^{n} (X - \alpha^{p-1}) \right)^n$$

Le même changement d'indice donne :

$$\alpha^2 Q(\alpha X) = Q(X)$$

Et donc :

$$\alpha^2 F(\alpha X) = \frac{\alpha^2 P(\alpha X)}{\alpha^2 Q(\alpha X)} = \frac{\alpha^2 P(\alpha X)}{Q(X)} = \frac{P(X)}{Q(X)} = F(X)$$

On en déduit :

$$\boxed{\alpha^2 P(\alpha X) = P(X)}$$

⋆ $b^2 \neq 0$ par identification tous les termes sont nuls sauf les monômes $a_{2n-2}X^{2n-2}$ et $a_{n-2}X^{n-2}$.

En effet :

$$\alpha^2 a_{2n-2}(\alpha X)^{2n-2} = \alpha^{2n} a_{2n-2} X^{2n-2} = a_{2n-2} X^{2n-2}$$

$$\alpha^2 a_{n-2}(\alpha X)^{n-2} = \alpha^n a_{n-2} X^{n-2} = a_{n-2} X^{n-2}$$

Donc P est de la forme :

$$\boxed{P(X) = aX^{2n-2} + bX^{n-2}}$$

⋆ En effectuant virtuellement la réduction au même dénominateur on trouve $a = n$.

Exercice 3

Énoncé :

1°) On considère le polynôme suivant :

$$P_n(X) = X^{n+1} - (n+1)X - 1$$

Montrer que P_n admet dans $\mathbb{C}$, $(n+1)$ racines distinctes $\alpha_0, ..., \alpha_n$.

2°) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

$$\varphi_n(X) = \frac{X^n - 1}{X^{n+1} - (n+1)X - 1}$$

1°) Le polynôme P_n est de degré $n+1$ donc d'après le théorème d'Alembert il admet $n+1$ racines dans $\mathbb{C}$.

Montrons qu'elles sont toutes distinctes, autrement dit que P_n admet $n+1$ racines simples.

Supposons que P_n admette une racine r d'ordre de multiplicité supérieure ou égale à 2.

Alors r est au moins racine de P_n' c'est-à-dire du polynôme :

$$P_n'(X) = (n+1)X^n - (n+1) = (n+1)(X^n - 1)$$

Donc r est une racine nième de l'unité, or r ne serait pas racine de P_n, en effet :

$$P_n(r) = r^{n+1} - (n+1)r - 1 = r - (n+1)r - 1 = -nr - 1 \neq 0$$

D'où la contradiction. Toutes les racines sont simples donc distinctes.

2°) Remarquons que :

$$\varphi_n(X) = \frac{1}{n+1}\frac{P_n'(X)}{P_n(X)}$$

Le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{C}$ et possède $n+1$ racines deux à deux distinctes, donc :

$$\boxed{\varphi_n(X) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{X - \alpha_i}}$$

Exercice 4

<u>Énoncé</u> :

Soit $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associée aux réels deux à deux distincts $t_0,...,t_n$. Calculer pour $k\in\{0,...,n+2\}$ les sommes :

$$S_k=\sum_{i=0}^{n} t_i^k \widetilde{L}_i(0)$$

Rappelons que $(L_0,...,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, on a donc :

$$P(X)=\sum_{i=0}^{n} P(t_i)L_i(X)$$

On choisit $P(X)=X^k$ avec $1\leq k\leq n$:

$$X^k=\sum_{i=0}^{n} t_i^k L_i(X^k)$$

Puis on évalue en 0 d'où :

$$\sum_{i=0}^{n} t_i^k L_i(0)=0$$

Donc :

$$\forall 1\leq k\leq n \Longrightarrow S_k=0$$

Si on choisit le polynôme constant $P=1$ c'est-à-dire pour le cas $k=0$ on a :

$$S_0=\sum_{i=0}^{n} L_i(0)=1$$

Traitons maintenant le cas $k=n+1$:

Le polynôme $P-A$ avec $P(X)=\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X-t_i)$ et $A(X)=X^{n+1}$ est de degré au plus n.

Donc de nouveau en décomposant sur la base des polynômes de Lagrange :

$$(P-A)(X)=\sum_{i=0}^{n}(P-A)(t_i)L_i(X)$$

Et puisque P s'annule en chaque t_i on a :

$$P(X)-A(X)=-\sum_{i=0}^{n} t_i^{n+1}L_i(X)$$

On évalue ensuite en 0 pour déterminer la somme recherchée :

$$\sum_{i=0}^{n} t_i^{n+1} L_i(0) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} t_i$$

Enfin pour le cas $k = n+2$ on remarque que le coefficient du terme en X^n de P est $\sum_{j=0}^{n} t_j$.

Ainsi en prenant cette fois $B(X) = X^{n+2}$ on considère le polynôme :

$$Q(X) = B(X) - XP(X) - \left(\sum_{j=0}^{n} t_j\right) X^{n+1}$$

qui est de degré au plus n peut se décomposer sur la base adéquate :

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} B(t_i)L_i(X) - \sum_{i=0}^{n} t_i P(t_i) L_i(X) - \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} t_j\right) t_i^{n+1}$$

Et on évalue en 0 on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} t_i^{n+2} L_i(0) = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} t_j \prod_{i=0}^{n} t_i$$

Exercice 5

<u>Énoncé</u> :

1°) Soit a un réel différent de 2 ou -2 ; décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$G_a(X) = \frac{1}{(X+2)(X-2)(X-a)}$$

2°) En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de :

$$F(X) = \frac{2}{(X+2)(X-2)(X-1)^3}$$

1°) Étant donné que le dénominateur est scindé à pôles simples on peut écrire :

$$G_a(X) = \frac{\alpha_0}{(X+2)} + \frac{\alpha_1}{(X-2)} + \frac{\alpha_2}{(X-a)} \quad \text{avec} \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^3$$

On multiplie par $(X+2)$ les deux membres, on obtient :

$$\frac{1}{(X-2)(X-a)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1(X+2)}{(X-2)} + \frac{\alpha_2(X+2)}{(X-a)}$$

On donne alors à X la valeur -2, les deux derniers termes s'annulent et on trouve :

$$\alpha_0 = \frac{1}{4(2+a)}$$

On procède de même en multipliant par $(X-2)$ et en donnant à X la valeur 2, on trouve :

$$\alpha_1 = \frac{1}{4(2-a)}$$

Enfin on donne à X une valeur particulière, admettons 0, et on détermine :

$$\alpha_2 = \frac{1}{(a+2)(a-2)}$$

D'où la décomposition en éléments simples :

$$\boxed{G_a(X) = \frac{1}{4(2+a)(X+2)} + \frac{1}{4(2-a)(X-2)} + \frac{1}{(a+2)(a-2)(X-a)}}$$

2°) On écrit :

$$F(X) = 2G_1(X) \times \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1}{6(X+2)(X-1)^2} + \frac{1}{2(X-2)(X-1)^2} - \frac{2}{3(X-1)^3}$$

Il nous reste à décomposer en éléments simples les deux premières fractions rationnelles.

$$\frac{1}{(X+2)(X-1)^2} = \frac{a_0}{(X+2)} + \frac{a_1}{(X-1)} + \frac{a_2}{(X-1)^2}$$

On multiplie par $(X+2)$ et $(X-1)^2$ et on donne respectivement à X les valeurs -2 et 1.

On en tire $a_0 = \frac{1}{9}$ et $a_2 = \frac{1}{3}$, puis en prenant $X = 0$ on a $a_1 = -\frac{1}{9}$.

D'où la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(X+2)(X-1)^2} = \frac{1}{9(X+2)} - \frac{1}{9(X-1)} + \frac{1}{3(X-1)^2}$$

On fait de même pour l'autre fraction, et au final on aboutit à :

$$\boxed{F(X) = \frac{1}{54(X+2)} + \frac{1}{2(X-2)} - \frac{14}{27(X-1)} - \frac{4}{9(X-1)^2} - \frac{2}{3(X-1)^3}}$$