Devoir de Mathématiques n°18

Kévin Polisano
MPSI 1

Mardi 13 Mai 2008

Exercice 1

Énoncé :

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ carrées d'ordre 2 à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Dans la suite de l'exercice, a, b, c, d désignent des entiers relatifs.

1°) Montrons que $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a clairement $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Soit $(M, M') \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^2$,

$$M + M' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MM' = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

Chaque coefficient est dans $\mathbb{Z}$ par produits et sommes d'entiers relatifs.

Donc $M + M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $MM' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. CQFD.

2°) Cette propriété est vraie dans tout anneau A :

L'ensemble des éléments inversibles de celui-ci est un groupe $(U(A), .)$:

La loi . est une l.c.i et associative dans $U(A)$ car l'est dans A, et $1_A \in U(A)$ (son propre inverse).

Soit $x \in U(A)$ son symétrique x^{-1} est élément de $U(A)$ car son symétrique est x.

Donc l'ensemble $GL_2(\mathbb{Z})$ est le groupe des unités de $M_2(\mathbb{Z})$.

3°) Rappelons que l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Pour que les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$ soit que $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ il faut et il suffit que :

$$\boxed{|ad - bc| = 1}$$

4°) On pose :

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}), ad - bc = 1 \right\}$$

a) On a :

$$\boxed{\mathrm{Det}(MM') = \mathrm{Det}(M)\mathrm{Det}(M') = 1}$$

Donc $MM' \in SL_2(\mathbb{Z})$ et de plus $M^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$ car :

$$\boxed{\mathrm{Det}(M^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} = 1}$$

Donc $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

b) Déterminons les $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

On a par hypothèse :

$$3d - 5c = 1 \Leftrightarrow 3d - 5c = 3 \times (-3) - 5 \times (-2) \Leftrightarrow 3(d+3) = 5(c+2)$$

Puisque $3 \wedge 5 = 1$ on en déduit grâce à Gauss :

$$\boxed{\begin{cases} c = 3k + 2 \\ d = 5k + 3 \end{cases}}$$

<u>Remarque</u> : Si la matrice appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$ alors elle appartient à $GL_2(\mathbb{Z})$.

c) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que a et b soient premiers entre eux.

D'après le théorème de Bézout il existe alors $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$\boxed{ad - bc = 1}$$

Ainsi la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$, la condition est suffisante.

Supposons que a et b ne soient pas premiers entre eux, avec $a < b$ (quitte à inverser les rôles).

Alors il existerait $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $b = \lambda a$. Une telle matrice vérifierait :

$$ad - \lambda ac = 1 \Leftrightarrow a(d - \lambda c) = 1$$

Ainsi les seules valeurs possibles seraient :

$$\boxed{\begin{cases} a = 1 \\ d - \lambda c = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -1 \\ d - \lambda c = -1 \end{cases}}$$

Mais alors on aurait $(a,b) = (\pm 1, \pm\lambda)$, or ± 1 étant premier avec tout entier on aboutit à une contradiction.

La condition est donc nécessaire. CQFD.

Exercice 2

Énoncé :

On considère n nombres complexes $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ et on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, puis pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p = a_0 + a_1\omega^p + \cdots + a_{n-1}(\omega^p)^{n-1}$$

On désigne par A et M les deux matrices d'ordre n suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a2 & a3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

a) Remarquons au préalable que $M = (\omega^{(i-1)(j-1)})$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Notons $M^2 = (a_{ij})$ et alors :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(i+j-2)} = \sum_{k=1}^{n} (\omega^{i+j-2})^{k-1} = \frac{1-(\omega^{i+j-2})^n}{1-\omega^{i+j-2}}$$

Ainsi on a $a_{ij} = n$ si $i+j = n+2$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Soit une matrice de la forme :

$$M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On effectue une permutation σ sur les colonnes de façon à avoir nI_n, et donc :

$$\boxed{\mathrm{Det}(M^2) = \epsilon(\sigma)\mathrm{Det}(nI_n) = \epsilon(\sigma)n^n}$$

b) Calculons la première ligne du produit $AM = (c_{ij})$:

$$c_{11} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = S_0$$

$$c_{12} = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1} = S_1$$

Ainsi de suite on a $L_1 = [S_0, S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}]$.

La deuxième ligne maintenant :

$$c_{21} = a_{n-1} + a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-2} = S_0 \ (\forall i \in [1, n], c_{i1} = S_0)$$

$$c_{22} = a_{n-1} + a_0\omega + a_1\omega^2 + \cdots a_{n-2}\omega^{n-1} = \omega(a_0 + a_1\omega + \cdots a_{n-1}\omega^{n-1}) = \omega S_1$$

On utilise ici le fait que $\omega^n = 1$.

En réitérant le procédé on obtient la matrice produit suivante :

$$AM = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \cdots & S_{n-1} \\ S_0 & \omega S_1 & \omega^2 S_2 & \cdots & \omega^{n-1} S_{n-1} \\ S_0 & \omega^2 S_1 & \omega^4 S_2 & \cdots & \omega^{2(n-1)} S_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_0 & \omega^{n-1} S_1 & \omega^{2(n-1)} S_2 & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} S_{n-1} \end{pmatrix}$$

On utilise la sommes des termes des suites géométriques de raison ω^i, on obtient comme en a. :

$$MAM = \begin{pmatrix} nS_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & nS_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & nS_{n-2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & nS_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & nS_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On réapplique la même permutation σ pour avoir une matrice diagonale, et alors :

$$\boxed{\mathrm{Det}(MAM) = \epsilon(\sigma) n^n S_0 S_1 \ldots S_{n-1}}$$

Or $\mathrm{Det}(MAM) = \mathrm{Det}(M)^2 \mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(M^2)\mathrm{Det}(A)$ et on en déduit :

$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} S_k}$$

Exercice 3

1°) Traitons un cas plus général, soit x_1, x_2, x_3 les racines complexes de l'équation :

$$x^3 + px + q = 0$$

Posons $S = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$, ainsi après quelques transformations on obtient :

$$S = ((x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3))^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2 + 4x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$$

Les fonctions symétriques élémentaires permettent d'écrire :

$$S = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2 + 4\sigma_3\sigma_1$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = p \\ \sigma_3 = -q \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{S = 2p^2}$$

Donc dans le cas particulier de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ on a $S = 2$.

2°) De nouveau attardons nous au cas général où :

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$$

On cherche à factoriser P donc à déterminer ses racines :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \Rightarrow x^2\left(ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}\right) = 0$$

Puisque $x = 0$ n'est pas solution on simplifie par x^2 et on obtient :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Posons alors $y = x + \frac{1}{x}$ et remarquons que :

$$y^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

On se ramène donc à l'équation :

$$\boxed{ay^2 + by + c - 2a = 0}$$

Reprenons alors l'exercice où :

$$P(X) = X^4 - 2(\cos a + \cos b)X^3 + 2(1 + 2\cos a \cos b)X^2 - 2(\cos a + \cos b)X + 1$$

En effectue de même le changement de variable $Y = X + \frac{1}{X}$ et on se ramène à :

$$\begin{aligned}
Y^2-2(\cos a+\cos b)Y+2(1+2\cos a\cos b)-2 &= Y^2-2(\cos a+\cos b)+4\cos a\cos b\\
&= (Y-(\cos a+\cos b))^2-\cos^2 a-\cos^2 b+2\cos a\cos b\\
&= (Y-(\cos a+\cos b))^2-(\cos a-\cos b)^2\\
&= (Y-2\cos a)(Y-2\cos b)
\end{aligned}$$

Puis en rétablissant la variable initiale et en remettant X^2 en facteur on aboutit à :

$$\boxed{P(X)=(X^2-2\cos aX+1)(X^2-2\cos bX+1)}$$

3°) Soit $a\notin\pi\mathbb{Z}$, on souhaite factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$P(X)=X^n+\binom{n}{1}X^{n-1}\cos(a)+\binom{n}{2}X^{n-2}\cos(2a)+...+\cos(na)$$

On peut remarquer que :

$$2P(X)=(X+e^{ia})^n+(X+e^{-ia})^n$$

Cherchons alors les racines de P :

$$P(X)=0\Longleftrightarrow\left(\frac{X+e^{ia}}{X+e^{-ia}}\right)^n=-1$$

Les racines nième de -1 sont de la forme $\exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{n}\right)$.

Posons $\theta=\frac{(2k+1)\pi}{n}$ on doit alors résoudre :

$$\frac{X+e^{ia}}{X+e^{-ia}}=e^{i\theta}$$

On isole sans difficulté :

$$X=\frac{e^{i(\theta-a)}-e^{ia}}{1-e^{i\theta}}$$

Puis en mettant la moitié en facteur, on obtient après simplifications :

$$X=\frac{\sin\left(a-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Donc toutes les racines de P sont réelles.

On en déduit la factorisation de P suivante :

$$\boxed{P(X)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\frac{\sin\left(a-\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}\right)}$$

Problème

Énoncé :

Soit ϕ l'application qui à un polynôme P réel fait correspondre le polynôme $\phi(P)$ défini par :

$$\phi(P)(X) = P(X+1) + P(X)$$

1°) Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\mu_1 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(\mu_1 P_1 + P_2)(X) &= (\mu_1 P_1 + P_2)(X+1) + (\mu_1 P_1 + P_2)(X) \\
&= \mu_1 P_1(X+1) + P_2(X+1) + \mu_1 P_1(X) + P_2(X) \\
&= \mu_1(P_1(X+1) + P_1(X)) + (P_2(X+1) + P_2(X)) \\
&= \mu_1 \phi(P_1)(X) + \phi(P_2)(X)
\end{aligned}$$

Donc ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2°a) Soit λ_0 une valeur propre de ϕ, il existe $P \neq 0$ tel que :

$$\phi(P)(X) = \lambda_0 P(X) \iff P(X+1) + P(X) = \lambda_0 P(X) \iff P(X+1) = (\lambda_0 - 1)P(X)$$

On a $\lambda_0 \neq 1$ sinon P serait nul, exclu.

On raisonne sur le coefficient dominant a_n :

$$a_n(X+1)^n = (\lambda_0 - 1)a_n X^n$$

On développe avec le binôme de Newton et on identifie, il vient :

$$\boxed{\lambda_0 - 1 = 1 \Longrightarrow \lambda_0 = 2}$$

Sinon a_n serait nul et on appliquerait la même méthode aux termes restants.

Donc $\lambda_0 = 2$ est l'unique valeur propre de ϕ.

b) Soit l'ensemble :

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = 2P\}$$

• Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ on a puisque ϕ est un endomorphisme :

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \lambda_1 \phi(P_1) + \lambda_2 \phi(P_2) \\
&= \lambda_1 2 P_1 + \lambda_2 2 P_2 \\
&= 2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)
\end{aligned}$$

E est stable par combinaisons linéaires et contient le polynôme nul, donc E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Et ceci est vrai pour toute valeur propre, E_{λ_k} est appelé sous-espace propre associé à λ_k.

• Soit $P \in E$, on a :

$P(X+1)+P(X) = 2P(X) \Leftrightarrow P(X+1) = P(X) \Leftrightarrow a_n(X+1)^n+...+a_1(X+1)+a_0 = a_nX^n+...+a_1X+a_0$

En développant avec le binôme de Newton et en identifiant on obtient successivement :

$$\boxed{a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = 0}$$

Donc P est constant, E est alors l'ensemble des polynômes constant.

3°) Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$\phi(P) = 0 \Longrightarrow P(X+1) = -P(X) \Longrightarrow a_n(X+1)^n+...+a_1(X+1)+a_0 = -a_nX^n-...-a_1X-a_0$

Et de nouveau par identification on en déduit :

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$$

Par suite P est nul est donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}}$$

4°) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a clairement $\deg(P(X+1)) \leq n$ et donc par somme :

$$\boxed{\deg(P(X+1)+P(X)) \leq n \Longrightarrow \phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]}$$

Donc l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

• ϕ est injective car son noyau est réduit à 0, donc $\phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ également.

Par ailleurs étant en dimension finie ϕ_n est surjective car injective.

Donc ϕ_n est bijective.

5°) On se donne un polynôme P de degré n, il appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et ϕ_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Ceci étant valable pour tout n, ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

6°) Soit P un polynôme de degré n quelconque, il s'écrit :

$$P(X) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kX^k = a_0 + X\sum_{k=1}^{n} a_kX^{k-1}$$

De plus il est clair $E \cap X\mathbb{R}[X] = \{0\}$ donc :

$$\boxed{\mathbb{R}[X] = E \bigoplus X\mathbb{R}[X]}$$

7°a) Soit $f = \phi - 2Id$ restreinte à $X\mathbb{R}[X]$ on a :

$$f(P)(X) = 0 \Longleftrightarrow \phi(P)(X) = 2P(X) \Longleftrightarrow P(X+1) = P(X)$$

Étant donné qu'on a démontré que les P vérifiant cette égalité sont constants, on en déduit d'après la restriction que $P = 0$ et donc que f est injective car $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

b) Il semble y avoir une erreur d'énoncé, en effet considérons $P(X) = X^2$.

On a bien $P \in X\mathbb{R}_1[X]$ mais :

$$\phi(P)(X) - 2P(X) = (X+1)^2 + X^2 - 2X^2 = 2X + 1$$

Et $\phi(P) \notin X\mathbb{R}_1[X]$.

En revanche on a ϕ qui est à valeur dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ car :

$$\phi(P)(X) - 2P(X) = P(X+1) - P(X)$$

Ainsi le terme de plus haut degré est éliminé.

De plus le noyau de ϕ est de dimension 1, donc d'après le théorème du rang :

$$\boxed{\text{rg}(\phi) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])}$$

Son image est bien $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Posons $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$, par linéarité de Δ on a :

$$\Delta(P) = a_n\Delta(X^n) + ... + a_1\Delta(X) + a_0$$

Or $\deg\Delta(X^{n-1})...\deg\Delta(X) \leq n-1$ et $\deg\Delta(X^n) = n-1$ donc :

$$\boxed{\deg\Delta(P) = n - 1 = \deg(P) - 1}$$

8°) Supposons le polynôme U_{n-1} ainsi défini, d'après 4)b il existe des polynômes P tels que $\phi(P) = U_{n-1}$ et de tels polynômes diffèrent d'une constante, il y en a donc un seul qui s'annule en 0.

Donc par récurrence il existe une suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n > 0, U_n(0) = 0 \\ U_n(X+1) = U_n(X) + U_{n-1}(X) \end{cases}$$

D'après 4)c on a :

$$\boxed{\deg(U_n) = 1 + \deg(U_{n-1}) = ... = n + \deg(U_0) = n}$$

Puis on remarque en faisant la différence que :

$$U_{n-1}(X) = na_nX^{n-1} + ...$$

Supposons que $\forall 0 \leq k \leq n-1$ le coefficient dominant de U_k soit $a_k = \frac{1}{k!}$.

D'après l'égalité précédente on a :

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n-1)!} = \frac{1}{n!}}$$

Par récurrence on a montré que le coefficient dominant de U_n est $a_n = \frac{1}{n!}$.

9°) Soit n et p deux entiers naturels tels que $p < n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n(1) = U_n(0) + U_{n-1}(0) = 0$$
$$U_n(2) = U_n(1) + U_{n-1}(1) = 0$$

Par récurrence on a :

$$\boxed{\forall p < n, U_n(p) = 0}$$

On en déduit :

$$\boxed{U_n(X) = \frac{X(X-1)...(X-n+1)}{n!}}$$

10°) La famille de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telles que $\deg(U_n) = n$ pour tout n par conséquent c'est une base de $\mathbb{R}[X]$ de degrés échelonnés.

Donc tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des (U_n).

11°) Calculons $\phi(U_k)$ pour $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}
\phi(U_k)(X) &= U_k(X+1) + U_k(X) \\
&= \frac{(X+1)X...(X-k+2)}{k!} + \frac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!} \\
&= \frac{X(X-1)...(X-k+2)[(X+1)+(X-k+1)]}{k!} \\
&= \frac{X(X-1)...(X-k+2)(2X+2-k)}{k!}
\end{aligned}$$