# Devoir de Mathématiques n°13

Kévin Polisano
MPSI 1

Vendredi 15 Février 2008

## Problème

Énoncé :

Le but du problème est de déterminer un équivalent de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) = \frac{1}{\binom{2n}{n}^{\alpha}} \left[ \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^{\alpha} \right] \text{ où } \alpha > 0$$

On admet que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, v_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}}$$

Dans tout le problème $r$ est un réel tel que $\frac{1}{2} < r < 1$.

**1.a** La fonction $f : x \mapsto e^{-\alpha \frac{x^2}{n}} dx$ est décroissante sur tout intervalle $[k, k+1]$ donc :

$$\forall x \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

En intégrant entre $k$ et $k+1$ on a :

$$f(k+1)(k+1-k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)(k+1-k)$$

On somme la deuxième inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Et par linéarité de l'intégrale on obtient :

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

En faisant de même sur le segment $[k-1, k]$ on a l'autre inégalité, donc finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \int_1^{n+1} e^{-\alpha \frac{x^2}{n}} dx \leq v_n(\alpha) \leq \int_0^n e^{-\alpha \frac{x^2}{n}} dx}$$

**b.** En effectuant le changement de variable $x = \sqrt{\frac{n}{\alpha}} t \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{n}{\alpha}} dt$ on se ramène à :

$$\sqrt{\frac{n}{\alpha}} \int_{\sqrt{\frac{\alpha}{n}}}^{(n+1)\sqrt{\frac{\alpha}{n}}} e^{-t^2} dt \leq v_n(\alpha) \leq \sqrt{\frac{n}{\alpha}} \int_0^{n\sqrt{\frac{\alpha}{n}}} e^{-t^2} dt$$

Les bornes inférieures tendent vers 0 et les supérieures vers $+\infty$ donc d'après le résultat sur l'intégrale de Gauss :

$$\boxed{v_n(\alpha) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n\pi}{\alpha}}}$$

**2.a** Par décroissance de $f$ on a :

$$\forall k \in ]n', n], f(k) \leq f(n')$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n'} f(k) \leq nf(n') - \sum_{k=1}^{n'} f(k) \leq nf(n')$$

Soit :

$$\sum_{n'<k<n} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} \leq ne^{-\alpha \frac{n'^2}{n}}$$

Puis on choisit $n' \geq n^r$ d'où :

$$\boxed{\sum_{n'<k<n} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} \leq ne^{-\alpha n^{2r-1}}}$$

**b.** Puisque $0 < r < \frac{1}{2}$ on a l'inégalité :

$$0 \leq v_n(\alpha) - \sum_{1 \leq k \leq n^r} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} \leq ne^{-\alpha n^{2r-1}}$$

Or par croissance comparée :

$$\lim_{n \to +\infty} ne^{-\alpha n^{2r-1}} = 0$$

Donc par encadrement on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left( v_n(\alpha) - \sum_{1 \leq k \leq n^r} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} \right) = 0$$

Et donc :

$$\boxed{\sum_{1 \leq k \leq n^r} e^{-\alpha \frac{k^2}{n}} \sim v_n(\alpha)}$$

**3.a** On a d'après $\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{2n-(n+k)} = \binom{2n}{n-k}$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n-k}^{\alpha}$$

Puis en effectuant le changement de variable $k' = n-k$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}^{\alpha}$$

De même avec le changement de variable $k' = n+k$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k}^{\alpha} = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}^{\alpha}$$

Ainsi :

$$2\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k}^{\alpha} + \binom{2n}{n}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^{\alpha}$$

Soit en divisant par $\binom{2n}{n}^{\alpha}$ :

$$\frac{2}{\binom{2n}{n}^{\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k}^{\alpha}\right] + 1 = \frac{1}{\binom{2n}{n}^{\alpha}} \left[\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^{\alpha}\right]$$

D'où :

$$\boxed{u_n(\alpha) = \frac{2}{\binom{2n}{n}^{\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k}^{\alpha}\right] + 1}$$

**b)** Travaillons sur l'expression de $p_n(k)$ :

$$\begin{aligned}
p_n(k) &= \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)}{\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{j}{n}\right)} \\
&= n\frac{\prod_{j=1}^{k-1} (n-j)}{\prod_{j=1}^{k} (n+j)} \\
&= n\frac{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}}{\frac{(n+k)!}{n!}} \\
&= n\frac{\frac{n!}{n(n-k)}}{\frac{(n+k)!}{n!}} \\
&= \frac{n!^2}{(n+k)!(n-k)!}
\end{aligned}$$

On a donc en multipliant par $(2n)!$ :

$$\frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} p_n(k)$$

Soit finalement :

$$\boxed{\forall k \in [1, n], \binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n} p_n(k)}$$

**4.a** Soit $t \in [0, 1[$ et $x \in [0, t]$, considérons les fonctions :

$$\begin{array}{l} a : x \mapsto \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x \\ b : x \to \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{2x}{1-t^2} \\ c : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \\ d : x \mapsto \ln(1+x) - x \end{array}$$

Ces quatre fonctions sont définies et dérivables sur $[0, 1[$ et on a :

$$\forall x \in [0, 1[, a'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 = \frac{2x^2}{1-x^2} > 0$$

$$\forall x \in [0, t[, b'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-t^2} = \frac{2}{1-x^2} - \frac{2}{1-t^2} < 0$$

car

$$0 \leq x \leq t < 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq t^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - t^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1-x^2} \leq \frac{1}{1-t^2} \leq 1$$

$$\forall x \in [0, 1[, c'(x) = \frac{1}{1+x} + x - 1 = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

$$\forall x \in [0, 1[, d'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$$

Les fonctions $a$ et $c$ sont strictement croissantes avec $a(0) = c(0) = 0$ donc positives sur $[0, t[\subset [0, 1[$.

Les fonctions $b$ et $d$ sont strictement décroissantes avec $b(0) = d(0) = 0$ donc négatives $[0, t[$.

D'où les inégalités :

$$\boxed{\begin{array}{c} 2x \leq ln(1+x) - \ln(1-x) \leq \frac{2x}{1-t^2} \quad (1) \\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (2) \end{array}}$$

**b)** Commençons par remarquer que :

$$\ln(p_n(k)) = \sum_{j=1}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{j}{n}\right) - \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{j}{n}\right)$$

On choisit alors $x = \frac{j}{n}$ dans (1) et sommons de 1 à $k-1$ on obtient :

$$\frac{(k-1)k}{n} \leq -\ln(p_n(k)) - \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

Or d'après (2) on a $-\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \frac{k^2}{2n^2} - \frac{k}{n}$ d'où :

$$\frac{k^2}{n} - \frac{k}{n} \leq -\ln(p_n(k)) + \frac{k^2}{2n^2} - \frac{k}{n}$$

Soit :

$$\ln(p_n(k)) + \frac{k^2}{n} \leq \frac{k^2}{2n^2}$$

En multipliant par $\alpha > 0$ on a :

$$\ln(p_n(k)^\alpha) + \alpha\frac{k^2}{n} \leq \alpha\frac{k^2}{2n^2}$$

Enfin en passant à l'exponentielle :

$$\boxed{p_n(k)^\alpha e^{\alpha\frac{k^2}{n}} \leq e^{\alpha\frac{k^2}{2n^2}}}$$

**5.a** En utilisant les questions 3.a et 3.b on peut écrire :

$$u_n = 2\sum_{k=1}^{n} p_n(k)^\alpha + 1 = \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \left(p_n(k)^\alpha e^{\alpha\frac{k^2}{n}}\right)$$

Et donc

$$u_n(\alpha) - 2v_n(\alpha) = 2\sum_{1\leq k\leq n} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \left(p_n(k)^\alpha e^{\alpha\frac{k^2}{n}} - 1\right) + 1$$

On scinde la somme en deux parties :

$$u_n(\alpha) - 2v_n(\alpha) = 2\sum_{1\leq k\leq n^r} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \left(p_n(k)^\alpha e^{\alpha\frac{k^2}{n}} - 1\right) + \left[2\sum_{n^r\leq k\leq n} p_n(k)^\alpha - 2\sum_{n^r\leq k\leq n} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} + 1\right]$$

D'après 2.a on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{n^r\leq k\leq n} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} = 0$ et d'après 4.c $\sum\limits_{n^r\leq k\leq n} p_n(k)^\alpha$ est négligeable devant $v_n(\alpha)$ en $+\infty$. La constante 1 étant bien évidemment négligeable devant $v_n(\alpha)$, en notant $o(v_n)$ la quantité entre crochet on a bien :

$$\boxed{u_n(\alpha) - 2v_n(\alpha) = 2\sum_{1\leq k\leq n^r} e^{-\alpha\frac{k^2}{n}} \left(p_n(k)^\alpha e^{\alpha\frac{k^2}{n}} - 1\right) + o(v_n)}$$

où $o(v_n)$ est une suite négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**5.d** D'après la question précédente, en reportant dans 5.a on a quand $n \to +\infty$ :

$$u_n(\alpha) - 2v_n(\alpha) = o(v_n(\alpha)) \Rightarrow u_n(\alpha) \sim 2v_n(\alpha)$$

Et on en conclut finalement que :

$$\boxed{u_n(\alpha) \sim \sqrt{\frac{n\pi}{\alpha}}}$$

**5.e** Une autre méthode que celle proposée est d'utiliser la formule de Striling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

On veut l'équivalent de :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Or d'après la formule :

$$(2n)! \sim 2\sqrt{\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \quad \text{et} \quad (n!)^2 \sim 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$$

D'où par quotient d'équivalent :

$$\boxed{\binom{2n}{n} \sim \frac{n^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{n^{2n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}}$$