Devoir de Mathématiques n°12

Kévin Polisano
MPSI 1

Lundi 4 Février 2008

Exercice 1 : Dénombrement et coefficients binomiaux

Énoncé :

Soit un rectangle de longueur n (n entier naturel) et de largeur 2. On prend des petits rectangles de longueur 2 et de largeur 1. On cherche à expliciter le nombre de possibilités, pour n donné, de recouvrir le grand rectangle par des petits ne se chevauchant pas et à en déduire une relation liant les coefficients binomiaux.

1)a) Dans un rectangle $2 \times n$ dénombrons le nombre de possibilités :

Pour $n = 2$ nous avons deux possibilités, pour $n = 3$ trois possibilités, pour $n = 4$ cinq..etc

Il semblerait que chaque terme soit la somme des deux précédents.

En effet soit a_n le nombre de possibilités dans un rectangle $2 \times n$, raisonnons sur la position du dernier rectangle :

• Soit le dernier rectangle est vertical, alors l'avant dernier peut être vertical ou horizontal, donc il y a a_{n-1} possibilités dans le rectangle $2 \times (n-1)$ (c'est-à-dire le rectangle $2 \times n$ privé du dernier rectangle vertical).

• Soit le dernier rectangle est horizontal, alors nécessairement l'avant dernier est horizontal également. Ainsi le $n-2$ ème rectangle est soit horizontal soit vertical, donc il y a a_{n-2} possibilités dans le rectangle $2 \times (n-2)$ (c'est-à-dire le rectangle $2 \times n$ privé des deux rectangles horizontaux).

On a donc bien la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

Il s'agit de la suite de Fibonacci, la relation caractéristique associée est :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Les racines de ce trinôme sont :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Les premiers termes permettent d'identifier les constantes λ et μ donc finalement :

$$\boxed{a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

b) Montrons par récurrence double que $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n-k}{k}$:

<u>Initialisation</u> :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{0-k}{k} = 1 \text{ et } a_1 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1-k}{k} = 1 \text{ et } a_2 = 1$$

On suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ montrons qu'elle le reste au rang $n+2$:

D'après la formule du triangle de Pascal on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{(n+2)-k}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{(n+1)-k}{k} + \binom{(n+1)-k}{k-1}$$

Et puisque $\binom{n+1}{-1} = 0$ alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{(n+2)-k}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{(n+1)-k}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{n-(k-1)}{k-1}$$

On établit le changement de variable $k' = k-1$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{(n+2)-k}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{(n+1)-k}{k} + \sum_{k'=0}^{+\infty}\binom{n-k'}{k'}$$

Et d'après les hypothèses de récurrence il vient :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{(n+2)-k}{k} = a_{n+2} + a_{n+1}$$

Or d'après la question précédente $a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+3}$ donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{(n+2)-k}{k} = a_{n+3}$$

La propriété est vraie aux rang 0 et 1 et est héréditaire sur $\mathbb{N}$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-k}{k}}$$

2) La question précédente permet d'affirmer que chaque terme de la suite de fibonacci est égale à la somme des termes d'une diagonale du triangle de Pascal.

EXERCICE 2 : ÉQUIVALENT D'UNE SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT

<u>Énoncé</u> :

On donne a et α des réels strictement positifs. Pour n entier naturel, on considère la fonction :

$$\begin{array}{cccc} \phi_n : & \mathbb{R}\backslash\{0, \cdots, n\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{a}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} \end{array}$$

Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent de x_n racine de l'équation $\phi_n(x) = \alpha$.

a) La fonction ϕ_n est continue strictement décroissante comme somme de fonctions strictement décroissantes, elle est donc bijective de $\mathbb{R}\backslash\{0, \cdots, n\}$ dans $\mathbb{R}$. De plus elle est strictement positive sur $]n, +\infty[$ de limite nulle donc :

$$\exists! x_n \in]n, +\infty[, \phi_n(x_n) = \alpha$$

b) Soit $\lambda \in]0, 1[$ on a :

$$\phi_n\left(\frac{n}{\lambda}\right) = \frac{\lambda a}{n} + \lambda \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \lambda \frac{k}{n}}$$

On reconnait une somme de Riemann, ainsi en passant à la limite il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_n\left(\frac{n}{\lambda}\right) = \lambda \times \int_0^1 \frac{1}{1 - \lambda x} dx = -\ln(1 - \lambda)$$

Par ailleurs la fonction $x \mapsto -\ln(1 - x)$ est continue strictement croissante sur $]0, 1[$ à valeur dans $]0, +\infty[$ donc bijective.

Il existe donc un unique λ_0 tel que :

$$-\ln(1 - \lambda_0) = \alpha$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_n\left(\frac{n}{\lambda_0}\right) = \alpha = \phi_n(x_n)$$

Par continuité on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{n}{\lambda_0}$$

Or :

$$-\ln(1-\lambda_0) = \alpha \Rightarrow \lambda_0 = 1 - e^{-\alpha}$$

Par conséquent :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{1-e^{-\alpha}}}$$

EXERCICE 3 : L'INÉGALITÉ DE HÖLDER INTÉGRALE

Énoncé :

Soit a et b deux réels, $a < b$, f et g deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $p \in]1, +\infty[$ et q le réel défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démontrons l'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Considérons la fonction $x \mapsto \ln(x)$ qui est concave sur $\mathbb{R}^{+^\star}$.

Et soient deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

D'après l'inégalité de Jensen on a :

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 \ln(x_1) + \lambda_2 \ln(x_2)$$

En prenant $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = x^p$ et $x_2 = y^q$ comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on obtient :

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{\ln(x^p)}{p} + \frac{\ln(y^q)}{q} = \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$$

Enfin on passe à l'exponentielle :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+^\star} \times \mathbb{R}^{+^\star}, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}}$$

Remarque : le cas où l'un au moins des éléments est nul conserve l'inégalité.

b) Appliquons l'inégalité précédente à $|tf(u)|$ et $|g(u)|$, on obtient :

$$|tf(u)||g(u)| \leq \frac{|tf(u)|^p}{p} + \frac{|g(u)|^q}{q}$$

Puisque $t > 0$ on a :

$$t|f(u)g(u)| \leq \frac{t^p|f(u)|^p}{p} + \frac{|g(u)|^q}{q}$$

Et en divisant par t :

$$\boxed{|f(u)g(u)| \leq \frac{t^{p-1}|f(u)|^p}{p} + \frac{|g(u)|^q}{qt}}$$

Puis en intégrant entre a et b :

$$\boxed{\int_a^b |fg| \leq \frac{t^{p-1}}{p}\int_a^b |f|^p + \frac{1}{qt}\int_a^b |g|^q}$$

c) En appliquant l'inégalité précédente à $F = \frac{f}{A}$ et $G = \frac{g}{B}$ avec :

$$A = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } B = \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

En particulier pour $t = 1$ on a :

$$\int_a^b |FG| \leq \frac{1}{p}\int_a^b |F|^p + \frac{1}{q}\int_a^b |g|^q$$

En remplaçant dans le membre de droite F et G par leur expression il s'en suit :

$$\int_a^b |FG| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où finalement :

$$\boxed{\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Remarque : Si $A = 0$ ou $A = \infty$ l'inégalité est également vérifiée.

On remontant les inégalités on voit que l'égalité est obtenue si F et G vérifient l'égalité de convexité. Or la fonction logarithme étant strictement concave, cette condition est réalisée seulement si $p\ln(F) = q\ln(G)$ c'est-à-dire si f^p et g^q sont proportionnels.

d) Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4 : Étude d'une fonction intégrale

Énoncé :

On se propose d'étudier la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$$

La courbe représentative de F sera notée Γ.

1) Considérons la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée :

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x(1+x^2)^2}$$

On pose $g(x) = 1+x^2-2x^2\ln(x)$, f' est du signe de g, étudions alors g :

g est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée :

$$g'(x) = -4x\ln(x)$$

L'étude du signe de g' montre que :

g est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ avec $g(1)=2$.

De plus sachant que $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour l'une et en factorisant par x^2 pour l'autre on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$$

La fonction g est continue et s'annule donc une unique fois en une valeur notée $\lambda \in [1,+\infty[$.

Ainsi :

$$\forall x \in]0,\lambda[, f'(x) > 0 \quad f'(\lambda) = 0 \quad \forall x \in]\lambda,+\infty[, f'(x) < 0$$

f est donc strictement croissante sur $]0,\lambda]$ et strictement décroissante sur $[\lambda,+\infty[$

Par ailleurs on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

Or F est l'unique primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 donc F est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée f.

Sachant que $\lambda > 1$ et connaissant les variations de f on a :

$$\forall x \in]0,1[, f(x) < 0 \quad f(1) = 0 \quad \forall x \in]1,+\infty[, f(x) > 0$$

Donc F est strictement décroissante sur $]0,1]$, s'annule en 1 et est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Par conséquent F est positive sur $]0,+\infty[$.

F est dérivable sur cet intervalle donc continue et $\forall x > 0, F'(x) = f(x)$.

2) Considérons la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$$

G est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme composée et différence de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$:

$$G'(x) = -\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) - F'(x)$$

Or comme $\forall x > 0, F'(x) = f(x)$ on a :

$$G'(x) = -\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$$

Et on remarque que :

$$-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x^2}\frac{x^2\ln(x)}{1+x^2} = f(x)$$

D'où :

$$\forall x > 0, G'(x) = 0$$

Donc G est constante et puisque $G(1) = F(1) - F(1) = 0$ alors :

$$\boxed{\forall x > 0, G(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)}$$

3)a) Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

On reconnait un taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0} = \frac{1}{1+0^2} = 1$$

La limite de φ en 0 existe et est finie, on prolonge donc par continuité en posant $\varphi(0) = 1$.

b) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

On fait une intégration par partie :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = [\arctan(t)\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t}dt$$

Soit :

$$\boxed{\forall x > 0, F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \int_1^x \varphi(t)dt}$$

c) Remarquons tout d'abord que :

$$\arctan(x)\ln(x) = \frac{\arctan(x)}{x} \times x\ln(x)$$

Comme $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ alors par produit :

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan(x) \ln(x) = 0$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} F(x) = \int_0^1 \phi(t)dt}$$

Or $\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq \arctan(t) \leq t$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+^\star}, 0 \leq \phi(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \phi(t)dt \leq 1$$

Ainsi la limite de F en 0 existe et est finie donc prolongeable par continuité.

Par ailleurs puisque $\forall x > 0, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ alors :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x)}$$

Montrons que F n'est pas dérivable en 0 :

$$F(x) - F(0) = \arctan(x)\ln(x) - \int_1^x \varphi(t)dt - \int_0^1 \varphi(t)dt$$

Par linéarité on obtient :

$$F(x) - F(0) = \arctan(x)\ln(x) - \int_0^x \varphi(t)dt$$

On divise par x pour faire apparaître un taux d'accroissement :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{\arctan(x)}{x}\ln(x) - \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)dt$$

Or on a établit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+^\star}, 0 \leq \varphi(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^x \varphi(t)dt \leq x \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)dt \leq 1$$

Le terme de droite est donc borné et $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan(x)}{x}\ln(x) = -\infty$ d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -\infty}$$

F n'est donc pas dérivable en 0, la limite de ce quotient montre que F admet une demi tangente verticale en 0.

4) Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x >$ calculons par intégration par parties :

$$I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)dt$$

Les fonctions $t \mapsto t^k$, $t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$, $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont continues sur $]0, +\infty[$

$$\int_1^x t^k \ln(t)dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t}dt$$

Soit :

$$I_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^x$$

Après simplification :

$$\boxed{I_k(x) = \frac{x^{k+1}[(k+1)\ln(x) - 1] + 1}{(k+1)^2}}$$

b) Pour $u \neq 1$ la somme des $n+1$ termes de la suite géométrique de raison u est :

$$\sum_{k=0}^n u^k = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n = \frac{1 - u^{n+1}}{1-u}$$

Posons $u = -x^2$ on a alors :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

D'où on en tire :

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}}$$

c) En utilisant la forme intégrale de I_{2k} on a :

$$F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) = \int_1^x \left(\frac{\ln(t)}{1+t^2} - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}\ln(t)\right)dt$$

Or d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}\ln(t) = \frac{\ln(t)}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)$$

D'où :

$$F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)dt$$

On en déduit la majoration :

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x)\right| = \int_x^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}|\ln(t)|dt \leq \int_x^1 t^{2n+2}|\ln(t)|dt$$

Soit :

$$\boxed{\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq I_{2n+2}(x)}$$

d) En utilisant l'expression de I_k on a :

$$\lim_{x\to 0} I_k = \frac{1}{(k+1)^2}$$

Par passage à la limite dans la majoration on obtient donc :

$$\left|F(x=0)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

Donc :

$$\boxed{|F(0)-u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}}$$

e) On désire une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$ donc :

$$\frac{1}{(2n+3)^2} \leq \frac{1}{10^2}$$

Cette inégalité est vérifiée pour $n \geq 4$, on obtiendra la précision demandée pour $n=4$:

$$\boxed{F(0)\approx 0,92}$$

$F(0)$ est appelée constante de Catalan, on ne sait pas à ce jour si elle est irrationnelle.

Remarque : Le point d'inflexion correspond au point où la dérivée seconde s'annule, il marque un changement de concavité. On a vu dans l'étude de f que sa dérivée f' s'annulait en λ avec $1,89<\lambda<1,90$, qui est le point d'inflexion recherché.

La représentation graphique de F à la page suivante.

5) La courbe Γ :