Devoir de Mathématiques n°11

Kévin Polisano
MPSI 1

Lundi 21 Janvier 2008

Exercice 1 : Analyse

Énoncé :

Soit f dérivable sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(a) = f'(b)$.

Montrons qu'il existe c élément de $]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

Considérons la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

On a $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = f'(a)$ et f et continue sur $]a,b]$ on prolonge par continuité en posant

$$g(a) = f'(a)$$

De plus g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a)+f(a)-f(x)}{(x-a)^2}$$

• Si $g(a) = g(b)$ alors d'après le théorème de Rolle :

$$\boxed{\exists c \in [a,b], g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}}$$

• Si $g(a) \neq g(b)$ alors il s'agit de montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = g(c)$

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\forall x \in]a,b[, f'(x) \neq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ainsi g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ et g y est continue donc injective.

En effet si il existait $x \neq y$ tel que $g(x) = g(y)$ alors d'après le théorème de Rolle il existerait $d \in [x,y] \subset [a,b], g'(d) = 0$ ce qui est exclut puisque g' ne s'annule pas sur cet intervalle.

⊛ g strictement croissante nous donne :

$$g'(b) \geq 0 \Rightarrow f'(b) \geq g(b) > g(a) = f'(a) = f'(b)$$

⊛ g strictement décroissante nous donne :

$$g'(b) \leq 0 \Rightarrow f'(b) \leq g(b) < g(a) = f'(a) = f'(b)$$

Dans les deux cas on aboutit à une contradiction ce qui prouve que :

$$\boxed{\exists c \in]a,b], f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}}$$

Exercice 2 : Théorème de Bernstein

Énoncé :

Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E.

On se propose de démontrer qu'il existe une bijection de E dans F.

On pose $h = g \circ f$ et $R = E - g(F)$.

On désigne par M toute partie de E tel que M contienne à la fois R et $h(M)$.

1)a) L'ensemble $\mathfrak{F}$ des parties M est non vide puisque $E \in \mathfrak{F}$

b) On pose $A = \bigcap\limits_{M \in \mathfrak{F}} M$.

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de $\mathfrak{F}$ on a :

$$\forall i \in I, R \cup h(M_i) \subset M_i$$

Donc :

$$\bigcap_{i \in I} [R \cup h(M_i)] \subset \bigcap_{i \in I} M_i$$

Or :

$$\bigcap_{i \in I} [R \cup h(M_i)] = R \cup [\bigcap_{i \in I} h(M_i)] \supset R \cup h(\bigcap_{i \in I} M_i)$$

D'où :

$$R \cup h(\bigcap_{i \in I} M_i) \in \bigcap_{i \in I} M_i$$

Soit finalement

$$\boxed{A \in \mathfrak{F}}$$

c) On montre également que :

$$M \in \mathfrak{F} \Rightarrow \underbrace{R \cup h(M)}_{M_1} \subset M \Rightarrow R \cup h(M_1) \subset \underbrace{R \cup h(M)}_{M_1} \Rightarrow M_1 \in \mathfrak{F}$$

2) On pose $B = E \backslash A$, $A' = f(A)$, $B' = g^{-1}(B)$.

a) Montrons que $\{A', B'\}$ est une partition de F :

• A' et B' sont non vides car A et B sont non vides tels que $A' \cap B' = \varnothing$

• On a montré que $R \cup h(A) \subset A$ et $R \cup h(A) \in \mathfrak{F}$ donc $A = R \cup h(A)$.

D'où :

$$R \cup h(A) \cup B = E \Rightarrow h(A) \cup B = E \backslash R = g(F) \Rightarrow g^{-1} \circ h(A) \cup B = g^{-1} \circ g(F)$$

L'application g^{-1} étant injective on a :

$$g^{-1} \circ h(A) \cup g^{-1} \circ B = F \Rightarrow g^{-1} \circ g \circ f(A) \cup g^{-1}(B) = F$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{A' \cup B' = F}$$

b) Montrons que l'application $\begin{array}{ll} k: & E \to F \\ x \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g^{-1}(x) \text{ si } x \in B \end{cases} \end{array}$ est bijective.

$\Longrightarrow$ k surjective

Soit $y_1 \in A'$ alors il existe $x_1 \in A$ tel que $y_1 = f(x_1)$.

De même soit $y_2 \in B'$ alors il existe $x_2 \in B$ tel que $y_2 = g^{-1}(x_1)$.

Comme $\{A', B'\}$ est une partition de $\mathfrak{F}$ alors :

$$\boxed{\forall y \in \mathfrak{F}, \exists x \in A \cup B = E, y = k(x)}$$

$\Longleftarrow$ k injective

$\forall (x, x') \in A^2, k(x) = k(x') \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ car f est injective.

$\forall (x, x') \in B^2, k(x) = k(x') \Rightarrow g^{-1}(x) = g^{-1}(x') \Rightarrow x = x'$ car g est injective (dans la mesure où elle est inversible à gauche).

$\forall (x, x') \in A \times B, k(x) = k(x') \Rightarrow f(x) = g^{-1}(x')$ impossible car $A' = f(A) \cap g^{-1}(B) = B' = \varnothing$

Donc finalement :

$$\boxed{\forall (x, x') \in E^2, k(x) = k(x') \Rightarrow x = x'}$$

Exercice 3 : Partition

Définition :

Soit E un ensemble fini non vide.
Pour tout k entier, on dit que $A_1, \cdot, A_k$ est une partition de E en k classes si :

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E \ ; \ \forall i \in [1,k], A_i \neq \varnothing \ ; \ \forall (i,j) \in [1,k], i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$$

Partie I

Dans cette partie on suppose que Card(E) $= n$. On note $r(n)$ le nombre de partitions de E. On note $r(0) = 1$. Pour tout $k \geq 1$, on note $r(n,k)$ le nombre de partitions de E en k classes.

1) Si $k > n$ c'est-à-dire s'il y a plus de classes que d'éléments alors nécessairement soit une classe est vide soit contient au moins un élément appartenant à une classe différente, ce qui est contraire aux hypothèses d'une partition, donc :

$$\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^{\star^2}, k > n \Rightarrow r(n,k) = 0}$$

2) De manière intuitive on conçoit bien que le nombre de partitions de E est égal à la somme du nombre de partitions de chaque classe. En effet $r(n,1) = 1$ est l'ensemble E tout entier, $r(n,n) = n$ dont chaque classe contient un singleton de E, puis on dénombre toutes les partitions de E en deux classes, puis trois et ainsi de suite ce qui couvre toutes les possibilités de partitions de E.

3) Soit $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ constitué de $n+1$ éléments.

• Nombre de partitions de E contenant $\{a_{n+1}\}$: $r(n)$

• Nombre de partitions de E contenant $\{a_{n+1}, a_i\}$: $\binom{n}{1} r(n-1)$

Il y a $\binom{n}{1}$ façons de choisir l'élément a_i et $r(n-1)$ de former une partition de $E \backslash \{a_{n+1}, a_i\}$

• Nombre de partitions de E contenant $\{a_{n+1}, a_i, a_j\}$: $\binom{n}{2} r(n-2)$

Il y a $\binom{n}{2}$ façons de choisir $\{a_i, a_j\}$ et $r(n-2)$ de former une partition de $E \backslash \{a_{n+1}, a_i, a_j\}$

De proche en proche on établit alors que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, r(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r(k)}$$

4) A partir de cette formule on peut calculer :

$$\boxed{\begin{array}{l} r(1) = 1 \\ r(2) = 2 \\ r(3) = 5 \\ r(4) = 15 \\ r(5) = 52 \\ r(6) = 203 \end{array}}$$

5) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 5, r(n) \geq 2^n$.

La propriété est vraie au rang $n = 5$ puisque $r(5) = 52 \geq 32 = 2^5$

Supposons la vraie au rang n et montrons qu'elle le reste au rang $n+1$:

$$r(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} r(k) + r(n) \geq r(n) + r(n) = 2r(n) \geq 2^{n+1}$$

(On utilise le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} r(k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} r(k) = r(n)$)

La propriété est vraie au rang $n = 5$ et est héréditaire sur $\mathbb{N}$ donc est vraie pour tout $n \geq 5$.

Montrons par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, r(n) \leq n!$

La propriété est vraie au rang $n = 0$ puisque $r(0) = 1 \leq 0! = 1$.

Supposons la vraie du rang 0 à n et montrons qu'elle le reste au rang $n+1$:

$$r(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r(k) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{r(k)}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$$

(On utilise le fait que $\forall k \in [0, n]$, $\frac{r(k)}{k!} \leq 1$ et $\frac{1}{(n-k)} \leq 1$ et qu'il y ait $n+1$ termes)

Enfin étant donné que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, n! \leq n^n$ on en conclut que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, r(n) \leq n^n}$$

6) On cherche le nombre de surjections $S(n,k)$ d'un ensemble à n éléments dans un ensemble k éléments.

Soit f une telle surjection. $\forall i \in [1, k], f^{-1}(\{i\}) \neq \varnothing$ car f surjective.

De plus $i \neq j \Rightarrow f^{-1}(\{i\}) \cap f^{-1}(\{j\}) = \varnothing$ car si $f(x) = i$ on ne peut pas avoir $f(x) = j$ et réciproquement.

Par ailleurs comme f va de E dans $[1, k]$ alors $\{f^{-1}(\{1\}), \cdots, f^{-1}(\{k\})\}$ est une partition de E.

Soit alors g une surjection de E dans $[1,k]$ telle qu'elle définisse la même partition que f ie :

$$\{f^{-1}(\{1\}),\cdots,f^{-1}(\{k\})\}=\{g^{-1}(\{1\}),\cdots,g^{-1}(\{k\})\}$$

Il existe donc une permutation σ de $[1,k]$ telle que :

$$\forall i\in[1,k], f^{-1}(\{i\})=g^{-1}(\{s(i)\})$$

Ainsi $f(x)=i$ et $g(x)=\sigma(i)=\sigma(f(x))$ pour tout x donc :

$$g=\sigma\circ f$$

Considérons une partition $C_1,\cdots C_k$ de E et l'application suivante :

$$f:E\rightarrow[1,k]$$
$$f(x)=i \text{ si } x\in C_i$$

f est une application surjective de E dans $[1,k]$. Soit P_k l'ensemble des partitions de E en k parties.

$$g:\text{Surj}(E,[1,k])\rightarrow E$$
$$f\rightarrow\{f^{-1}(\{1\}),\cdots,f^{-1}(\{k\})\}$$

g est bien définie et surjective, notons $A_1,A_2,\cdots,A_{r(n,k)}$ les $r(n,k)$ partitions de E.

S est l'union disjointe des ensembles $g^{-1}(A_i)$ est non vide et contient une application f_i.

Tous ses éléments sont de la forme $\sigma\circ f_i$ et si $\sigma\neq\sigma'$ alors $\sigma\circ f_i\neq\sigma'\circ f_i$.

Il y a donc autant d'éléments dans $g^{-1}(A_i)$ que de permutations σ soit $k!$:

$$\boxed{S(n,k)=\text{Card}(S)=\sum_{i=1}^{r(n,k)}\text{Card}(A_i)=\sum_{i=1}^{r(n,k)}k!=k!r(n,k)}$$

Partie II

On suppose que Card(E) $=2m$ avec $m\geq 1$.
On note a_m le nombre de partitions de E en m classes qui sont des paires.

1) Déterminons a_1, a_2, a_3 :

• $m=1$, Card(E) $=2$ soit $E=\{c_1,c_2\}$ qui est la seule paire qui partitionne E donc $a_1=1$.

• $m=2$, Card(E) $=4$ soit $E=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$ que l'on peut partitionner ainsi, $a_2=3$:

$$E=\{c_1,c_2\}\cup\{c_3,c_4\} \text{ ou } E=\{c_1,c_3\}\cup\{c_2,c_4\} \text{ ou } E=\{c_1,c_4\}\cup\{c_2,c_3\}$$

• $m=3$, Card(E) $=6$ soit $E=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$. Si l'on fixe c_1 appartenant à la6 paire $A_1=\{c_1,c_2\}$ on doit former une partition de $E\backslash A_1$ composé de quatre éléments. On a vu au point précédent qu'il y avait 3 partitions possibles, or étant donné qu'on peut fixer arbitrairement cinq paires il existe donc $a_3=3\times 5=15$ partitions de E.

2) On généralise la méthode précédente :

On fixe un élément a dans l'ensemble E partitionné. Par construction a appartient à une paire, donc :

$$E = \{a, b\} \cup E \backslash \{a, b\}$$

L'ensemble $E\backslash\{a, b\}$ possède $2m-2 = 2(m-1)$ éléments et est a fortiori partitionné en paires.

Or il existe a_{m-1} partitions de ce type, quant à b on a $2m-1$ choix (car a fixé) d'où :

$$\boxed{a_m = (2m-1)a_{m-1}}$$

3) On réitère la relation de récurrence trouvée :

$$\begin{aligned}
a_m &= (2m-1)\times(2m-3)\times(2m-5)\times\cdots 3\times 1 \\
&= \frac{(2m-1)!}{(2m-2)\times(2m-4)\times\cdots\times 2\times 1} \\
&= \frac{(2m-1)!}{2\times(m-1)\times 2\times(m-2)\times\cdots 2\times 1} \\
&= \frac{(2m-1)!}{2^{m-1}(m-1)!} \\
&= \frac{(2m)!}{2^m m!}
\end{aligned}$$

Partie III

On suppose que Card(E) $= n$ avec $n \geq 1$.
On note b_n le nombre de partitions de E en classes qui sont des paires ou des singletons.

1) $b_1 = 1$: l'ensemble E ne possède qu'un seul élément donc la partition correspond à $E = \{a_1\}$

$b_2 = 2$: $E = \{a_1, a_2\}$ donc deux partitions possibles : $E = \{a_1\} \cup \{a_2\}$ ou $E = \{a_1, a_2\}$

$b_3 = 4$: $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ 4 partitions :

$E = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\}$ ou $E = \{a_1, a_2\} \cup \{a_3\}$ ou $E = \{a_1\} \cup \{a_2, a_3\}$ ou $E = \{a_2\} \cup \{a_1, a_3\}$

En faisant de même une disjonction des cas on obtient $b_4 = 10$.

2) On suppose que $n = 2m$ $(m \geq 1)$. Classons les partitions suivant le nombre de singletons qu'elles contiennent :

<u>0 singleton</u> : E est partitionné uniquement en paires, donc $\binom{2m}{0}a_m$ partitions de E.

<u>2 singletons</u> : $E = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup E\backslash\{a_1, a_2\}$

- $\binom{2m}{2}$ façons de choisir les deux singletons.
- a_{m-1} partitions possibles de $E\backslash\{a_1, a_2\}$.

Soit $\binom{2m}{2}a_{m-1}$ partitions.

4 singletons : $E = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \{a_4\} \cup E\backslash\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

• $\binom{2m}{4}$ façons de choisir les quatre singletons.
• a_{m-2} partitions possibles de $E\backslash\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Soit $\binom{2m}{4}a_{m-2}$ partitions.

De proche en proche on obtient :

$$\boxed{b_{2m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} a_{m-k}}$$

3) Soit $C_1, C_2, \cdots, C_k$ une partition de E en singletons et paires.

On fixe un élément a de E qui appartient à un unique C_i. On peut alors partitionner l'ensemble des partitions P en deux ensembles :

• P_1 : Celles dont a est dans un singleton
• P_2 : Celles dont a est dans une paire

Calculons le cardinal de P_1 :

Soit $E \in P_1 / E = \{a\} \cup E\backslash\{a\}$, l'ensemble $E\backslash\{a\}$ possède $n-1$ éléments et est partitionné.

Il existe b_{n-1} partitions de ce type.

Calculons le cardinal de P_2 :

Soit $E \in P_2 / E = \{a, b\} \cup E\backslash\{a, b\}$, l'ensemble $E\backslash\{a, b\}$ possède $n-2$ éléments et est partitionné.

Il existe b_{n-2} partitions de ce type, et $n-1$ choix pour b d'où $\text{Card}(P_2) = (n-1)b_{n-2}$

Et puisque $\text{Card}(P) = \text{Card}(P_1) + \text{Card}(P_2)$ on en conclut :

$$\boxed{\forall n \geq 3, b_n = b_{n-1} + (n-1)b_{n-2}}$$

4)

$$\boxed{\begin{array}{l} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \\ b_3 = 4 \\ b_4 = 10 \\ b_5 = 26 \\ b_6 = 76 \\ b_7 = 232 \\ b_8 = 764 \\ b_9 = 2620 \\ b_{10} = 9496 \end{array}}$$

5) Soit f une involution d'un ensemble à n éléments dont lui on associe une partition en singletons et en paires, les singletons correspondant aux points fixes et les paires de la forme $\{x, f(x)\}, x \neq f(x)$ (réciproquement une telle partition permet de définir une involution).

Ainsi d'après ce qui précède, le nombre d'involutions est égal à b_n.

En particulier il existe 9496 involutions dans un ensemble à 10 éléments !