Devoir de Mathématiques n°10

Kévin Polisano
MPSI 1

Lundi 14 Janvier 2008

Exercice 1 : Développements limités et limites

Énoncé :

Soit I un intervalle réel, f une fonction deux fois dérivable sur I à valeurs réelles.

Soient a, b, c trois points distincts de I tels que $a < b < c$. Montrons qu'il existe $d \in I$ tel que :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(d)}{2}$$

★ Considérons la fonction g définie et deux fois dérivable sur I :

$$g(x) = (b-c)f(x) + (c-x)f(b) + (x-b)f(c) + A(x-b)(c-x)(b-c)$$

On a après dérivation : $g''(x) = (b-c)(f''(x) - 2A)$

★ Par ailleurs $g(b) = 0$, $g(c) = 0$ et on choisit A pour que $g(a) = 0$.

Donc d'après le **théorème de Rolle** :

$$\exists d_1 \in [a, b], g'(d_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \exists d_2 \in [b, c], g'(d_2) = 0$$

En appliquant le théorème à g' il vient :

$$\exists d \in [d_1, d_2], g''(d) = 0$$

On en tire alors : $\boxed{A = \dfrac{f''(d)}{2}}$

En reportant dans $g(a) = 0$ et en divisant par $(a-b)(b-c)(a-c)$ on a l'égalité voulue.

NB : L'hypothèse $a < b < c$ n'est pas nécessaire car a, b et c jouent des rôles symétriques.

Exercice 2 : Développements limités et limites

1) Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \exp\left[\frac{e^x - 1}{x}\arcsin(x)\right]$$

★ On écrit un $DL_4(0)$ de chaque facteur dans l'exponentielle :

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^4)$$

★ Le produit tronqué à l'ordre 4 donne :

$$\frac{e^x - 1}{x}\arcsin(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

★ On compose avec le $DL_4(0)$ de l'exponentielle :

$$f(x) = 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{11x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

On obtient donc : $\boxed{f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{7}{8}x^4 + o(x^4)}$

2) On se propose de déterminer la limite en $+\infty$ de h définie sur $]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right)^{x^2}$$

★ Posons $X = \dfrac{1}{x}$ alors en passant à l'exponentielle on recherche la limite en 0 de :

$$h(X) = \exp\left[\frac{\ln\left(2\sqrt{1+X} - \sqrt{1+2X}\right)}{X^2}\right]$$

★ Cherchons un équivalent du numérateur, pour cela on note $\varphi(x) = 2\sqrt{1+X} - \sqrt{1+2X} - 1$

$$\varphi(X) = 2\left(1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{16} + o(X^3)\right) - \left(1 + X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{2} + o(X^3)\right) - 1$$

C'est-à-dire : $\varphi(X) = \dfrac{X^2}{4} - \dfrac{3}{8}X^3 + o(X^3) = O(X^2)$

On en déduit : $\ln(1 + \varphi(X)) \sim \dfrac{X^2}{4}$

On en conclut finalement que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = \exp\left(\frac{1}{4}\right)}$$

3) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{2\star}$, déterminons un équivalent simple au voisinage de 0 de :

$$g(x) = \arcsin^p(x) - x^q$$

Le début du DL de l'arcsinus en 0 est :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Ainsi il y a trois cas à distinguer :

• Si $p < q$ alors $\boxed{g(x) \sim x^p}$

• Si $p > q$ alors $\boxed{g(x) \sim -x^q}$

• Si $p = q$ alors les deux puissances de x vont s'éliminer, et l'équivalent portera sur le deuxième terme du DL de $\arcsin^p(x)$.

Autrement dit avec le binôme de Newton :

$$\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^n = x^n\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)^n = x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{2k}}{6^k} = x^n + x^n.n.\frac{x^2}{6} + \cdots$$

Donc si $n = p = q$ alors :

$$\boxed{g(x) \sim \frac{nx^{n+2}}{6}}$$

4) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, déterminons la partie principale au voisinage de 0 de :

$$f_{a,b} : x \mapsto \ln(1 + x + ax^2) - \frac{x}{1+bx}$$

★ En utilisant les DL usuels $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$ et en composant on aboutit à :

$$f_{a,b}(x) = \left(a + b - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-b^2 - a + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(b^3 - \frac{a^2}{2} + a - \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4)$$

Il faut de nouveau distinguer plusieurs cas pour obtenir un équivalent monomial :

• Si $a + b \neq \frac{1}{2}$ $\boxed{f(x) \sim \left(a + b - \frac{1}{2}\right)x^2}$

• Si $a = \frac{1}{2} - b$ et $b^2 - b + \frac{1}{6} \neq 0$ $\boxed{f(x) \sim \left(b^2 - b + \frac{1}{6}\right)x^3}$

• Si $b = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ $\boxed{f(x) \sim \left(-\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right) x^4}$

• Si $b = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $a = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ $\boxed{f(x) \sim \left(-\dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right) x^4}$

Exercice 3 : Développement limité d'une réciproque

Soit f de $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$$

1) La fonction f est dérivable sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ comme quotient et composition de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(x+1)^2 + \ln(1+x)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ et y est continue, donc bijective.

Il vient que f admet une réciproque f^{-1} sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

2) La fonction f est de classe C^∞ sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ par composition de fonctions C^∞.

Par suite f^{-1} est de classe C^∞ sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ et $f(0) = 0$ donc admet un DL à tout ordre en 0.

Tout d'abord écrivons le $DL_4(0)$ de f :

★ On effectue le produit des DL usuels de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 4 que l'on compose avec celui de l'arctangente, on obtient :

$$\boxed{f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}$$

★ On cherche le $DL_4(0)$ de f^{-1} c'est-à-dire un polynôme P_4 de degré 4 tel que :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + o(x^4)$$

Puisque pour tout x au voisinage de 0 : $f(f^{-1}(x)) = x$ on peut composer P_4 avec le $DL_4(0)$ de f.

On regroupe les termes de même degré et on identifie à x.

On trouve alors :

$$\boxed{f^{-1}(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + \frac{149}{24}x^4 + o(x^4)}$$

Problème : Étude des fonctions absolument monotones

Préambule :

Soient a et b tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^{∞}.

f est dite **absolument monotone** (en abrégé AM) si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a,b[, f^{(n)}(x) \geq 0$.

f est dite **complètement monotone** (en abrégé CM) si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a,b[, (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$.

I.A Soient f et g deux fonctions AM définies sur $]a,b[$.

Par linéarité de la dérivée on a :

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$

De surcroît d'après la **formule de Leibniz** :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \geq 0$$

Donc l'ensemble des fonctions AM sur $]a,b[$ est stable par addition et produit.

I.B f est AM sur $]a,b[$, montrons par récurrence que e^f l'est aussi.

★ Au rang 1 la propriété est vraie puisque $(e^f)' = f' \times e^f \geq 0$

En effet f' est AM et e^f est strictement positive sur $]a,b[$ donc le produit est positif.

★ Supposons que au rang n, $\forall x \in]a,b[, (e^{f(x)})^{(n)} \geq 0$, alors au rang $n+1$:

$$\boxed{(e^{f(x)})^{(n+1)} = (e^{f(x)'})^{(n)} = (f'(x) \times e^{f(x)})^{(n)} \geq 0}$$

I.C Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $g :]-b,-a[\to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(-x)$.

Montrons l'équivalence suivante :

$$f \text{ est AM sur }]a,b[\Leftrightarrow g \text{ est CM sur }]-b,-a[$$

Pour cela montrons par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-b,-a[, (-1)^n g^{(n)}(x) = f^{(n)}(-x)}$$

★ Au rang 0 c'est vraie par définition de g et au rang 1 aussi car $g'(x) = -f'(-x)$.

★ Supposons la propriété vraie au rang n, alors :

$$(-1)^{n+1} g^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[g^{(n)}(x)]' = (-1)^{n+1}[(-1)^n \times (-1) \times f^{(n+1)}(x)] = f^{(n+1)}(x)$$

La propriété est vraie au rang 0 et 1 et est héréditaire, donc vraie pour tout n.

$\Rrightarrow$ Si f est AM sur $]a,b[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall -x \in]a,b[, f^{(n)}(-x) \geq 0$.

Ainsi x appartient à $]-b,-a[$ et d'après la relation établit ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-b,-a[, (-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0$$

Donc g est CM sur $]-b,-a[$.

$\Lleftarrow$ Réciproquement si g est CM sur $]-b,-a[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-b,-a[, (-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0$.

Ainsi x appartient à $]a,b[$ et d'après la relation établit ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall -x \in]a,b[, f^{(n)}(-x) \geq 0$$

Et donc f est AM sur $]a,b[$.

I.D.1 La fonction $g : x \mapsto -\ln(x)$ est définie positive et dérivable sur $]0,1[$.

Les dérivées successives de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ se déterminent sans mal, d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,1[, (-1)^n g^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x^n} \geq 0}$$

Il en advient que g est CM sur $]0,1[$.

I.D.2 Montrons que la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est dérivable et absolument monotone sur $]0,1[$.

Mais le calcul des dérivées successives est nettement moins évident que dans le cas précédent.

★ Quelques essais avec Maple semblent montrer que celles-ci se présentent sous la forme :

$$f^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

où P_n est un polynôme de degré n.

★ Cette propriété est clairement vraie aux premiers rangs, supposons là vraie au rang n :

$$f^{(n+1)}(x) = 2xP_n(x)(n+\frac{1}{2})(1-x^2)^{-n-\frac{1}{2}-1} + P_n'(x)(1-x^2)^{-n-\frac{1}{2}}$$

Et l'hypothèse $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}}$ conduit à la relation :

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + (1-x^2)P_n'(x)$$

★ Reste à trouver une relation liant $P_n'(x)$ à P_n pour établir une relation de récurrence.

Toujours avec Maple on s'aperçoit que :

$$P_n'(x) = n^2 P_{n-1}(x)$$

On démontre cette propriété par récurrence. Donc on a :

$$\boxed{P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + n^2(1-x^2)P_{n-1}(x)}$$

★ De plus par récurrence double on obtient grâce à cette relation que tous les coefficients des polynômes sont positifs, ce qui assure que f est absolument monotone sur $]0,1[$.

I.D.3 La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est positive sur $]0,1[$ et sa dérivée est f qui est AM sur $]0,1[$ donc $x \mapsto \arcsin(x)$ l'est également sur $]0,1[$.

I.D.4 La fonction $h : x \mapsto \tan(x)$ est positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrons par récurrence que les dérivées successives sont des polynômes en $\tan(x)$ à coefficients positifs :

★ Au rang 1 la propriété est vérifiée puisque la dérivée première est $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$.

★ Supposons la propriété vraie au rang n, i.e $h^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \tan(x)^k$

$$\boxed{h^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k.k.(1+\tan^2(x)).\tan(x)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} b_k \tan(x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k.\tan(x)^{k+1}}$$

avec $\forall k \in \mathbb{N}^\star, b_k = k.a_k \geq 0$.

$h^{(n+1)}$ est un polynôme en $\tan(x)$ (comme somme de polynômes en $tan(x)$) à coefficients positifs.

Ceci clos la démonstration : h est AM sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

I.E.1 On suppose dans cette question $a \in \mathbb{R}$ et f est AM sur $]a,b[$.

★ f est AM donc croissante sur $]a,b[$ et minorée par 0 donc d'après le **théorème de la limite monotone** elle admet une limite finie à droite de a :

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda = \lim_{a^+} f}$$

★ Une autre façon de procédé est d'utiliser la convexité de f découlant de l'absolue monotonie.

En effet on a vu qu'une fonction convexe est toujours minorée par une fonction affine :

$$\exists (m,n) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]a,b[, f(x) > mx + n$$

Ainsi la limite de f en a ne peut pas être $-\infty$, donc est finie.

★ On prolonge f en posant $f(a) = \lambda$. Montrons que f est dérivable à droite en a :

D'après le **théorème des accroissements finis** :

$$\exists c \in [a, x] \subset [a, b[, f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En faisant tendre x vers a^+ le taux d'accroissement admet bien une limite finie.

En outre d'après le **théorème de prolongement des fonctions de classe** C_1 on a f' continue à droite en a dans la mesure où elle y admet une limite finie (on applique la même méthode que pour f).

I.E.2 En procédant par récurrence avec cette même méthode appliquée aux dérivées successives on montre que f est indéfiniment dérivable à droite en a.

Ce phénomène ne se produit pas nécessairement en b car la limite à gauche peut être infinie, et le prolongement par continuité impossible.