Calcul matriciel

$\alpha 3 - MP^*$

1 Matrices et structure

- indexation : $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & \dots & m_{p,q} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps (commutatif en général).
- Soit $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant l\leqslant q}}$; la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant l\leqslant q}}$ forme une base de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et vérifie : $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$
- $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont *semblables* si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / N = P^{-1}MP$.
- $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont *équivalentes* si $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K}) / N = PMQ^{-1}$.
- M et N sont équivalentes ssi $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} N$. En particulier si $\operatorname{rg} M = r$ alors M est équivalente à la *réduite canonique* de rang r $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

1.1 Ecriture par blocs

- Une combinaison linéaire de matrices décomposées par blocs se traite comme une matrices de scalaires, pour peu que la somme des blocs ait un sens.
- Il en est de même pour le produit matriciel.

1.2 Application

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,r} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{r,r} \end{pmatrix}$ (M est triangulaire par blocs). Alors : $\det M = \prod_{i=1}^{r} \det A_{i,i}$.

1.3 Intervention des matrices-blocs

- Soit E un ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose : $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$ avec $E_1, \ldots, E_r$ stables par u. On note $u_i = u|_{E_i}^{E_i}$ l'induit de u sur E_i. Pour chaque E_i on construit une base $\mathcal{B}_i$; la base $\mathcal{B}$ résultant de la concaténation des $\mathcal{B}_i$ est une base de E. Soit $A_i = M_{\mathcal{B}_i}u_i$, on a alors $M_{\mathcal{B}}u = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_r)$.
- réciproque vraie

1.4 Opérations élémentaires

On pose : $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant n}}$, $M_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note $M = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & \cdots & L_n \end{pmatrix}$.

- Faire $M \longleftarrow M \times M_{i,j}(\lambda)$ revient à faire $C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i$.
- Faire $M \longleftarrow M_{i,j}(\lambda) \times M$ revient à faire $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.

1.5 Inversion des matrices carrées

- Méthode de la comatrice : soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{M}$ la comatrice de M, où $(\widetilde{M})_{i,j} = (-1)^{i+j} \times \det \text{mineur } M_{i,j}$. Alors $M\,{}^t\widetilde{M} = {}^t\,\widetilde{M}M = I_n \det M$.
- Méthode du système linéaire : $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $Y \in \mathbb{K}^n$, on résoud : $MX = Y$ par rapport à X et l'expression du résultat donne les coefficients de M^{-1}.
- La connaissance d'un polnôme annulateur peut éventuellement donner une expression polynômiale de M^{-1}.
- Décomposition QR : $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{C}$ la base de $\mathbb{R}^n$ telle que $M_{\mathcal{B}_0}\mathcal{C} = M$. On a : $\begin{array}{ccc} \text{B.O.N} \quad \mathcal{B}_0 & \xrightarrow{M} & \mathcal{C} \\ & & \downarrow \ {\scriptstyle \text{Gram-Schmidt} \atop \text{T triang. sup}} \\ & & \mathcal{B} \quad \text{B.O.N} \end{array}$; on écrit donc $U = MT$ avec $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $T \in GL_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Donc $M = UT^{-1}$.

1.6 Trace

- Cas d'une matrice carrée : $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.
  1. tr est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
  2. si $A \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, $BA \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
  3. si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.
- Cas d'un endomorphisme : E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit : $\operatorname{tr} u \overset{def}{=} \operatorname{tr} M_{\mathcal{B}}u$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.
  1. $\operatorname{tr} \in (\mathcal{L}(E))^*$
  2. Si E, F sont de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, E)$, alors $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.
  3. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in GL(E)$, alors $\operatorname{tr}(v^{-1}uv) = \operatorname{tr} u$
  4. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de rang r, alors $\operatorname{tr} p = 1_{\mathbb{K}} \cdot r$ pas nécéssairement non nul.

2 Déterminants

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, la forme développée de $\det M$ est $\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} m_{\sigma(k),k}$.

2.1 Déterminant de Vandermonde

On montre par récurrence sur n que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

2.2 Dérivée d'un déterminant

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $\Delta(t) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1(t) & \cdots & C_n(t) \end{vmatrix}$ où $\forall i, j,\ a_{i,j} : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

1. Si $k = 0$, alors Δ est $\mathcal{C}^0$ comme polynôme de fonctions $\mathcal{C}^0$.
2. Si $k \geqslant 1, \Delta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ et : $\Delta'(t) = \det(C_1'(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t), \ldots, C_n(t)) + \ldots + \det(C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n'(t))$. Le résultat reste vrai en remplaçant les colonnes par les lignes de Δ.

3 Discussion des systèmes linéaires

On appelle *système linéaire* tout système d'équation équivalent à un système de la forme $MX = Y$ où $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ donnée, $Y \in \mathbb{K}^p$ donné et $X \in \mathbb{K}^q$ inconnu. Soit $S : MX = Y$ un système linéaire, on lui définit $S_0 : MX = 0$ *système homogène associé*. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de S, $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de S_0 ; $\mathcal{S}_0$ est un sev de $\mathbb{K}^q$. $\mathcal{S}$ peut être vide ; dans ce cas on pose $\dim \mathcal{S} \overset{def}{=} -\infty$; sinon, on pose $\dim \mathcal{S} \overset{def}{=} \dim \mathcal{S}_0$. Si $X_0 \in S, \forall X \in \mathbb{K}^q, [X \in \mathcal{S}] \iff [(X - X_0) \in \mathcal{S}_0]$.

3.1 Cas des systèmes linéaires de Cramer

$MX = Y$ est un *système de Cramer* si M est carrée et inversible. $\forall Y \in \mathbb{K}^n$, $MX = Y$ possède alors une unique solution $X = M^{-1}Y$.

- Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $MX = Y$ est de Cramer ssi $\mathcal{S}_0 = \{0\}$
- *Formules de Cramer* : $M = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}$, $MX = Y$ admet pour solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où :

$$\forall i,\, x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, Y, C_{i+1}, \dots, C_n}{\det M}$$

3.2 Cas où $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\operatorname{rg} M = p$

Supposons $p < q$: $\operatorname{rg}(C_1, \dots, C_q) = p$. On extrait de $(C_1, \dots, C_q)$ une famille libre à p éléments, et cette famille engendre $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_q)$. Par exemple si $(C_1, \dots, C_p)$ est libre :

- S possède au moins une solution $\forall Y$
- Y donné ainsi que $\xi_{p+1}, \dots, \xi_q \in \mathbb{K}$, alors $\exists X \in \mathcal{S}$ unique dont les composantes vérifient $\forall i > p, x_i = \xi_i$.

On peut écrire $M = \left(A \mid B \right)$ avec $A \in GL_p(\mathbb{K})$, et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \xi_{p+1} \\ \vdots \\ \xi_q \end{pmatrix}$; alors $X = \begin{pmatrix} A^{-1}(Y - BX_2) \\ \hline X_2 \end{pmatrix}$. On a de plus $\dim \mathcal{S} = q - p$.

3.3 Cas général

$MX = Y$, $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} M = r$.

- Si $r = p$, voir 3.2
- Supposons $r < p$, $\operatorname{rg}(L_1, \dots, L_p) = r$. Supposons par exemple $(L_1, \dots, L_r)$ libre. $\forall s > r$, $\exists \lambda_{1,s}, \dots, \lambda_{r,s} \in \mathbb{K} / L_s = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i,s} L_i$. Avec ces notations, $\mathcal{S} \neq \varnothing$ ssi

  $$\forall s > r, y_s = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i,s} y_i \quad (\mathcal{C}_s)$$

  Si $\mathcal{C}_{r+1}, \dots, \mathcal{C}_p$ sont toutes vérifiées, $\mathcal{S}$ est aussi l'ensemble des solutions du système $S' \left| \begin{array}{l} L_1 X = y_1 \\ \vdots \\ L_r X = y_r \end{array} \right.$. S' est équivalent à S car ils ont même ensemble de solutions. La matrice de S' est $\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ Lr \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ de rang r, ce qui nous ramène à 3.2.

Si $\mathcal{S} = \varnothing$, S est *incompatible* ; sinon S est *compatible*.