Espaces métriques

$\alpha 13 - MP^*$

1 Généralités

1.1 Notion d'espace métrique et de distance

Un ensemble E est un *espace métrique* lorsqu'on le munit d'une *distance*, c'est à dire une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes suivants :

1. ***Séparation*** : $\forall (x,y) \in E^2$, $(d(x,y) = 0) \Longleftrightarrow (x = y)$
2. ***Symétrie*** : $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d(y,x)$
3. ***Inégalité triangulaire*** : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

On a alors, en conséquence :

- $|d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y)$
- $\forall z \in E$, $x \longmapsto d(x,z)$ est 1-lipschitzienne
- Si E est un $\mathbb{R} -$ ou $\mathbb{C} -$ ev normé, on peut le munir de la distance $d : (x,y) \longmapsto \|x - y\|$

Construction d'espaces métriques :

1. Soit $(E_i, d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'espaces métriques, on peut munir $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ de l'une des trois distances suivantes : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \in E_1 \\ \vdots \\ x_n \in E_n \end{pmatrix} \in E$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $D_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$, $D_2(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i,y_i))^2}$, $D_\infty(X,Y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i)$. E est alors un espace métrique.
2. Soit (E,d) un espace métrique, $F \subset E$, on munit F de $d_F = d|_{F \times F}$; (F, d_F) est alors un espace métrique.

1.2 Continuité

1.2.1 Continuité en un point

Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow E'$. Soit $x_0 \in E$, f est *continue* en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \forall x \in E$, $d(x, x_0) \leqslant \alpha \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon$. On a les propriétés suivantes :

- Soit $(E,d) \xrightarrow{f} (E',d') \xrightarrow{g} (E'',d'')$; si f est continue en x_0 et g en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.
- Soit $f : (E,d) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} (E_i, d_i)$, $E' = \prod_{i=1}^{m} (E_i, d_i)$ muni de $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. On peut écrire f sous la forme $f : x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Alors f est continue en x ssi chaque f_i est continue en x.
- Soit $f : E' = \prod_{i=1}^{m} (E_i, d_i) \longrightarrow (E,d)$, E' étant muni de $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Si f est continue en $x = (x_1, \ldots, x_m)$ alors chaque f_i est continue en x_i (pas de réciproque !)
- Soit (E,d) un espace métrique, $F \subset E$ muni de d_F. Soit $x_0 \in F$; si f est continue en x_0 au sens de d, alors $f|_F$ l'est aussi au sens de d_F. La réciproque est fausse.

1.2.2 Continuité sur E

$f : E \longrightarrow E'$ est ***continue sur*** E si elle l'est en tout point de E. Si $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$, on peut envisager deux notions :

- f est continue en tout point de A
- $f' : (A, d_A) \longrightarrow E'$ est continue

Ces deux notions sont équivalentes.

1.2.3 Uniforme continuité

$f : E \longrightarrow E'$ est ***uniformément continue*** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \forall (x,x') \in E^2$, $d(x,x') \leqslant \alpha \Longrightarrow d'(f(x), f(x')) \leqslant \varepsilon$. Si f est uniformément continue, alors f est continue. (réciproque fausse)

1.2.4 Applications lipschitziennes

$f : E \longrightarrow E'$ est $k -$ *lipschitzienne* si $\forall (x,x') \in E^2$, $d'(f(x), f(x')) \leqslant k d(x,x')$. Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

1.3 Suites

Soit (E,d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ admet $l \in E$ comme ***limite*** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $d(x_n, l) \leqslant \varepsilon$. l est alors unique.

Une suite (x_n) est ***de Cauchy*** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 / \forall n \geqslant n_0$, $\forall p \geqslant 1$, $d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \varepsilon$. Toute suite convergente est de Cauchy. E est dit ***complet*** si toute suite de Cauchy de E converge. Par exemple, $(\mathbb{Q}, |\,|)$ n'est pas complet.

Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, une ***valeur d'adhérence*** de (x_n) est la limite d'une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, s'il en existe. Si $A \subset E$, $l \in A$, $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, dire que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ équivaut à dire que $x_n \longrightarrow l$ dans (A, d_A). Dire que (x_n) est de Cauchy équivaut à dire que (x_n) est de Cauchy dans (A, d_A).

On a une caractérisation séquentielle de la continuité : soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$, $x \in E$, f est continue en x ssi pour toute suite (x_n) dans E de limite x, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

1.4 Ouverts d'un espace métrique

(E,d) un espace métrique. Soit $x \in E$, $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit :

- $\mathrm{B}(x,\rho) = \{y \in E / d(x,y) < \rho\}$ ***boule ouverte*** de centre x et de rayon ρ
- $\mathrm{B}'(x,\rho) = \{y \in E / d(x,y) \leqslant \rho\}$ ***boule fermée*** de centre x et de rayon ρ

Une partie $\Omega \subset E$ est dite ***ouverte*** si $\forall x \in \Omega$, $\exists \rho \in \mathbb{R}^{+*} / \mathrm{B}(x,\rho) \subset \Omega$. Si $E = \mathbb{R}$, un intervalle est une partie ouverte ssi il est de la forme $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On a les propriétés suivantes :

1. E et $\varnothing$ sont des ouverts
2. Si $\mathcal{I}$ est un ensemble d'indices (fini ou non) et si $(\theta_i)_{i \in \mathcal{I}}$ est une famille d'ouverts, alors $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \theta_i$ est un ouvert
3. Si $(\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille finie d'ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^{n} \theta_i$ est un ouvert
4. Dans un espace métrique produit, tout produit cartésien d'ouverts est ouvert.

Caractérisation : soit $f : E \longrightarrow E'$, f est continue ssi pour tout ouvert $\theta' \subset E'$, $f^{-1}(\theta')$ est un ouvert de E.

Soit (E,d) un espace métrique, $(A, d_A) \subset E$, si $\Omega \subset A$, Ω est un ouvert de (A, d_A) ssi il existe un ouvert Ω' de E tel que $\Omega = \Omega' \bigcap A$.

1.5 Fermés

Soit (E,d) un espace métrique, F est un ***fermé*** si $E \backslash F$ est un ouvert. Si $E = \mathbb{R}$, un intervalle est un fermé ssi il est de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ ou $[a,b]$ avec a et b finis. On a les propriétés suivantes :

- E et $\varnothing$ sont des fermés
- toute intersection (finie ou non) de fermés est fermée

- toute réunion finie de fermés est fermée

Caractérisation séquentielle : (E,d) un espace métrique, $F \subset E$. F est un fermé ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in F$.

- Dans un espace métrique produit, tout produit cartésien de fermés est fermé
- (A, d_A) espace métrique induit par (E,d). $F \subset A$ est un fermé ssi il est de la forme $F' \bigcap A$ où F' est un fermé de E.

1.6 Intérieur d'une partie

(E,d) un espace métrique, $A \subset E$. $x \in E$ est dit *intérieur* à A si $\exists \rho > 0 / \mathrm{B}(x,\rho) \subset A$. On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A. On a les propriétés :

1. $\overset{\circ}{E} = E$, $\overset{\circ}{\varnothing} = \varnothing$
2. Si $A \subset E$, $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand : si Ω est un ouvert inclus dans A, alors $\Omega \subset \overset{\circ}{A}$
3. Si $A' \subset A$, $\overset{\circ}{A'} \subset \overset{\circ}{A}$
4. Si A, B sont deux parties de E, alors : $(A \overset{\circ}{\bigcap} B) = \overset{\circ}{A} \bigcap \overset{\circ}{B}$, $(A \overset{\circ}{\bigcup} B) \supset \overset{\circ}{A} \bigcup \overset{\circ}{B}$

1.7 Adhérence d'une partie

(E,d) un espace métrique, $A \subset E$. $x \in E$ est *adhérent* à A si toute boule ouverte non vide de centre x rencontre A : $\forall \rho > 0$, $\mathrm{B}(x,\rho) \bigcap A \neq \varnothing$, ou encore : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in A / d(x,y) \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in E$; x est adhérent à A ssi il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que $x = \lim x_n$. On note $\overline{A}$ l'*adhérence* de A, c'est à dire l'ensemble des points adhérents à A.

Propriétés :

1. $\overline{A} \supset A$; de plus, si F est un fermé contenant A, alors $\overline{A} \subset F$
2. si $A \subset E$, $\overline{A} = E \backslash (E \overset{\circ}{\backslash} A)$
3. si $A \subset B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$
4. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$; $\overline{A \bigcap B} \subset \overline{A} \bigcap \overline{B}$

Si E est un espace métrique, on dit que A est *dense* dans E si $\overline{A} = E$; si $A \subset B \subset E$, on dit que A est *dense* dans B si $B \subset \overline{A}$.

- Soit $A \subset B \subset E$, $f, g : (E,d) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} (E', d')$. Si $f|_A = g|_A$ et A est dense dans B, alors $f = g$.
- $f, g : B \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$. Si $\forall x \in A$, $f(x) \leqslant g(x)$ et A dense dans B, alors $f \leqslant g$.

2 Compacité

2.1 Définitions

Soit (E,d) un espace métrique. E est dit *compact* si toute suite dans E admet au moins une valeur d'adhérence. Une partie $A \subset E$ est dite *compacte* si toute suite dans A admet au moins une valeur d'adhérence dans A. Si $A \subset E$ est compacte, l'espace métrique induit (A, d_A) est compact.

2.2 Propriétés

1. Si E est compact, tout fermé de E est compact.
2. Soit $F \subset E$; si F est compact, F est fermé et borné.
3. Soit $(E, D) = \prod\limits_{i=1}^{n} (E_i, d_i)$ où $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Si pour tout i, A_i est un compact de E_i, alors $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ est un compact de E.
4. (E,d), (E',d') deux espaces métriques, $f : A \subset E \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E'$; si A est compacte alors $f(A)$ est compacte.
5. Caractérisation des compacts : Soit $E = \mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, produit cartésien de $(\mathbb{K}, |\,|)$, muni de $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Une partie de E est compacte ssi elle est fermée bornée. (Remarque : cela reste vrai dans les $\mathbb{K} -$ ev de dimension finie.)
6. *Théorème de Heine* :
   (a) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ une partie compacte non vide. Si $f : A \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$, f est bornée et atteint ses bornes.
   (b) E, E' deux espaces métriques, A compact inclus dans E et $f : A \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E'$. Alors f est uniformément continue.

2.3 Applications (exercices)

2.3.1 Modèles de compacts

1. On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.
2. Soit E un plan affine euclidien, muni de la distance euclidienne. Tout cercle est alors un compact.
3. Soit E un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite x. Alors $A = \{x, x_1, \ldots\}$ est compact.

2.4 Compacité, convergence uniforme et intégrales

2.4.1 Convergence uniforme

Soit E, E' deux espaces métriques, $A \subset E$, (u_n) une suite de fonctions $A \longrightarrow E'$. On dit que (u_n) *converge simplement* vers $u : A \longrightarrow E'$ si $\forall x \in A$, $\lim u_n(x) = u(x)$. On dit que (u_n) *converge uniformément* vers u si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 / \forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in A$, $d'(u_n(x), u(x)) \leqslant \varepsilon$.

Si toutes les u_n sont continues en $x_0 \in A$ (resp. sur A) et si (u_n) converge uniformément vers u, alors u est continue en x_0 (resp. sur A).

2.4.2 Intégrales à paramètres

Soit E un espace métrique, $A \subset E$, I un segment de $\mathbb{R}$, $f : A \times I \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{C}$. Alors $x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue.

3 Espaces métriques complets

(E,d) est dit *complet* si toute suite de Cauchy dans E converge. $A \subset E$ est dite *complète* si (A, d_A) est complet.

3.1 Propriétés

1. Soit A une partie d'un espace métrique E quelconque, si A est complète, alors A est fermée.
2. Soit E un espace métrique complet, si $A \subset E$ est fermée, alors A est complète.
3. Soit E un espace métrique, si $A \subset E$ est compacte, alors A est complète.
4. Soit $E = \prod\limits_{i=1}^{n} E_i$, $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Si pour tout i, $A_i \subset E_i$ est complète, alors $A = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ est complète.

3.2 Théorème du point fixe (hors programme)

Soit E un espace métrique, $A \subset E$. $f : A \longrightarrow A$ est une *contraction* (est *contractante*) s'il existe $k < 1$ tel que f soit $k -$ lipschitzienne. Dans ce cas :

1. Il existe au plus un $l \in A$ tel que $f(l) = l$.
2. Soit $a \in A$ et soit (u_n) la suite récurrente telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge, sa limite est un point fixe de f.
3. Si f admet un point fixe l, alors pour tout $a \in A$, la suite précédente converge vers l.

Le théorème du point fixe : Soit E un espace métrique, $A \subset E$ une partie complète, $f : A \longrightarrow A$ contractante. Dans ce cas,

1. f admet un unique point fixe $l \in A$.
2. $\forall a \in A$, la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

3.3 Théorème de projection sur un convexe

Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe) muni de la norme associée au produit scalaire. Si $A \subset E$ est convexe et complète, alors $\forall x \in E$, $\exists! a \in A$ tel que $d(x,a) = \inf\{d(x,y), y \in A\} \stackrel{def}{=} d(x,A)$.

Remarques :

1. Soit (E,d) un espace métrique, et $A \subset E$ compacte non vide. Alors $\forall x \in E$, $\exists a \in A / d(x,a) = d(x,A)$.
2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un fermé non vide de E. Alors $\forall x \in E$, $\exists y \in F / d(x,y) = d(x,F)$.

4 Connexité par arc

4.1 Généralités

Soit E un espace métrique, $A \subset E$; si $a, b \in A$, un arc joignant a et b est la donnée d'une application $f : [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} A$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. On définit la relation $\mathcal{R}$: $a\mathcal{R}b$ ssi a et b peuvent être joints par arc dans A. C'est une relation d'équivalence. On dit que A est *connexe par arcs* si deux éléments quelconques de A peuvent être joints par un arc.

4.2 Propriétés

1. Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
2. Si E est un espace vectoriel réel (ou complexe) normé, tout convexe est connexe par arcs.
3. $A \subset E$ est dite *étoilée* si il existe $a_0 \in A$ tel que $\forall x \in A$, $[a_0, x] \subset A$. Un partie étoilée est connexe par arcs.
4. Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, A un connexe par arcs de E, $f : A \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E'$; alors $A' = f(A)$ est connexe par arcs. Conséquence : si $E' = \mathbb{R}$, $f(A)$ est un intervalle. Si $c \in [f(t), f(t')]$, alors $\exists t'' \in A / f(t'') = c$.
5. Soit $(E,D) = \prod_{i=1}^{n} (E_i, d_i)$, $D \in \{D_1, D_2, D_\infty\}$. Si A_i est un connexe par arcs de E_i pour tout i, alors $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ est connexe par arcs.

4.3 Complément : connexité

Soit E un espace métrique, $A \subset E$ est dite *connexe* si dans l'espace métrique induit (A, d_A), A et $\varnothing$ sont les seules parties ouvertes et fermées à la fois. Cela équivaut à : pour tous ouverts θ et θ' de E tels que $\theta \bigcap \theta' = \varnothing$, si $A \subset \theta \bigcup \theta'$, alors $A \subset \theta$ ou $A \subset \theta'$. On a les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ est connexe
- tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe
- tout connexe par arcs est connexe