Formes bilinéaires et quadratiques

$\alpha 11 - MP^*$

1 Généralités

On se place dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

1.1 Formes bilinéaires

E un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque. $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une *forme bilinéaire* si pour tout $x \in E$, $y \longmapsto f(x,y)$ est une forme linéaire et pour tout $y \in E$, $x \longmapsto f(x,y)$ est une forme linéaire. f est *symétrique* si $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = f(y,x)$.

Si E est de dimension finie, soit $\mathcal{B}$ une base de E ; si $(x,y) \in E^2$, on note $X = M_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$. Toute forme bilinéaire sur E est alors de la forme $(x,y) \overset{f}{\longmapsto} {}^tXMY$, $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. f est symétrique ssi M est symétrique ssi ${}^tM = M$.

1.2 Formes bilinéaires symétriques et dualité

Soit f une forme bilinéaire symétrique (fbs) de E, $x \in E$, on définit une application $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ telle que $\forall x \in E$, $\varphi(x) : y \longmapsto f(x,y)$. φ est une application linéaire de E dans E^*.

Par définition, $\ker f \overset{def}{=} \ker \varphi = \{x \in E / \forall y \in E, f(x,y) = 0\}$. f est *non dégénérée* si $\ker f = \{0\}$. Si de plus E est de dimension finie, on définit $\mathrm{rg}(f) \overset{def}{=} \mathrm{rg}(\varphi)$.

1.3 Structure et matrices

L'ensemble des fbs de E est un sev de $\mathbb{K}^{E \times E}$. Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on définit pour $f \in FBS(E)$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(f) = (f(e_i, e_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. $M_{\mathcal{B}} : f \in FBS(E) \longmapsto M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est linéaire, $\ker M_{\mathcal{B}} = \{0\}$, $\mathrm{Im}(M_{\mathcal{B}}) = Sym_n(\mathbb{K})$. De plus, $(M_{\mathcal{B}}(f) = 0) \Longrightarrow (f = \underline{0})$.

Corollaire : $\dim FBS(E) = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété : $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi)$ donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(f))$. De plus, f est non dégénérée ssi $M_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

1.4 Orthogonalité relative à une forme bilinéaire symétrique

E un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque, f une fbs ; pour tout $(x,y) \in E^2$, on dit que $x \perp y$ si $f(x,y) = 0$. Si F est un sev de E, on pose $F^\perp = \{y \in E / \forall x \in F, f(x,y) = 0\}$; c'est un sev de E. On a toujours $F \subset F^{\perp\perp}$, $E^\perp = \ker f$. En revanche, $F \bigcap F^\perp \neq \{0\}$ en général.

Propriété (hors programme) : Si E est de dimension finie, f FBS de E, alors il existe une base orthogonale pour f.

Lemme : Soit $f \in FBS(E)$, E de dimension quelconque ; si $\forall x \in E$, $f(x,x) = 0$, alors $f = \underline{0}$.

1.5 Changement de base, matrices congruentes

E un ev de dimension n. Soit f une fbs, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. $M = M_{\mathcal{B}}(f)$, $M' = M_{\mathcal{C}}(f)$, $P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Alors $M' = {}^tPMP$.

$(M, M') \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$ sont *congruentes* si elles sont symétriques et $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / M' = {}^t PMP$. C'est une relation d'équivalence sur $Sym_n(\mathbb{K})$. Si M et M' sont congruentes, alors elles sont équivalentes et ont même rang.

1.6 Formes quadratiques

E un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque. $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une *forme quadratique* si il existe une fbs f telle que $\forall x \in E$, $q(x) = f(x,x)$.

Caractérisation : $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique ssi :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. $f : (x,y) \in E^2 \longmapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est une fbs

dans ce cas f est l'unique fbs telle que $q(x) = f(x,x)$. On l'appelle *forme polaire* de q.

On définit $\ker q \overset{def}{=} \ker f$; en général, $\ker q \neq q^{-1}(\{0\})$. On dit que q est *non dégénérée* si f l'est. Si de plus E est de dimension finie, on pose $\mathrm{rg}(q) \overset{def}{=} \mathrm{rg}(f)$, et si $\mathcal{B}$ est une base de E, $M_{\mathcal{B}}(q) \overset{def}{=} M_{\mathcal{B}}(f)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, q est *positive* si $\forall x \in E$, $q(x) \geqslant 0$, et q est *définie positive* si $\forall x \in E \backslash \{0\}$, $q(x) > 0$. On parle de même de f fbs positive, définie positive.

2 Formes quadratiques positives, définies positives

2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un $\mathbb{R}-$ev, f une fbs positive, q la forme quadratique associée. On a : $\forall x,y \in E$, $|f(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)q(y)}$

Corollaire : si q est positive, $\ker q = q^{-1}(\{0\})$ (hors programme).

Conséquence : on pose $\|x\| = \sqrt{q(x)}$. $\| \ \|$ est une *semi-norme* car :

- $\forall x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$
- $\|0\| = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x,y \in E$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

2.2 Espaces préhilbertiens

Un ev réel E muni d'une fbs définie positive est dit *préhilbertien* (réel). La fbs est alors appelée *produit scalaire*, souvent noté $(x \mid y)$ ou $< x \mid y >$. $x \longmapsto \|x\|$ est réellement une *norme*, car on a de plus $(\|x\| = 0) \Longrightarrow (x = 0)$. On a les cas d'égalité suivants dans les inégalités précédentes :

- *Cauchy-Schwarz* : égalité ssi (x,y) liée
- *Inégalité triangulaire* : égalité ssi (x,y) positivement liée, c'est à dire $x = 0$ ou $\exists \lambda \geqslant 0 / x = \lambda y$

2.3 Espaces euclidiens

Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie. On a alors le procédé de Gram-Schmidt, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale, et si F est un sev, $E = F \oplus F^\perp$. On peut encore définir le *produit mixte* : si E est orienté, soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormale directe. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et donc $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \pm 1$. On dit alors que $\mathcal{B}$ est directe si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = +1$. Dans ce cas, $\det_{\mathcal{B}_0} = \det_{\mathcal{B}}$ est appelé *produit mixte*.

3 Adjoints d'un endomorphisme

$\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2.

3.1 Généralités

E un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque, f une fbs, q la fq associée. $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont *adjoints* si $\forall x,y \in E$, $f(u(x),y) = f(x,v(y))$. Dans ce cas v et u sont adjoints. u est *autoadjoint* (ou *symétrique*) si u est son propre adjoint. u est *antiautoadjoint* (ou *antisymétrique*) si $-u$ est adjoint de u. Si $u \in GL(E)$, u est *orthogonal* si u^{-1} est adjoint de u.

On peut caractériser les endomorphismes orthogonaux : u est orthogonal ssi $u \in GL(E)$ et $\forall x,y \in E$, $f(u(x),u(y)) = f(x,y)$ ssi $u \in GL(E)$ et $\forall x \in E$, $q(u(x)) = q(x)$.

Exercice : l'adjoint, s'il existe, est unique lorsque la fbs de référence est non dégénérée.

3.2 Cas d'un espace euclidien

Si E est euclidien, tout $f \in \mathcal{L}(E)$ admet un unique adjoint, noté f^* ; de plus, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, $M_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM_{\mathcal{B}}(f)$.

3.3 Propriétés de l'adjonction

E ev euclidien. $f \in \mathcal{L}(E) \longmapsto f^*$ est linéaire involutive ; c'est en particulier un automorphisme. On a les propriétés suivantes $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$; $\forall f \in GL(E)$, $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$; $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\det f = \det f^*$, $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(f^*)$, $\chi_f = \chi_{f^*}$, $\ker f^* = (\operatorname{Im}(f))^\perp$, $\operatorname{Im}(f^*) = (\ker f)^\perp$, $\operatorname{rg}(f^*) = \operatorname{rg}(f)$.

Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$, p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors p^* est le projecteur sur G parallèlement à F. Si de plus $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, alors p est autoadjoint : un projecteur orthogonal est autoadjoint.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, si F est un sev stable par F, alors $F^\perp$ est stable par f^*.

4 Théorèmes de réduction et applications

4.1 Réduction des endomorphismes symétriques

Si E est un ev euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, alors :

1. u est scindé
2. si $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$, alors $\ker(u - \lambda Id) \perp \ker(u - \mu Id)$
3. u est diagonalisable ; plus précisément, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale

4.2 Endomorphismes symétriques positif

E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. $(x, y) \longmapsto (u(x) \mid y)$ est une forme bilinéaire. C'est une fbs ssi $u^* = u$. Dans ce cas, on dit que u est ***positif*** si $\forall x \in E$, $(u(x) \mid x) \geqslant 0$. On dit que u est ***défini positif*** si $\forall x \neq 0$, $(u(x) \mid x) > 0$.

Propriétés : Soit u tel que $u^* = u$.

1. u est positif ssi $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$
2. u est défini positif ssi $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Lemme : Soit $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ la liste des valeurs propres de u. Alors $\forall x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant (u(x) \mid x) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$. De plus, cet encadrement est optimal car les valeurs extrèmes sont atteintes.

On note souvent $\mathcal{S}^+ = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ symétrique positif}\}$, $\mathcal{S}^{++} = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ symétrique défini positif}\}$.

$\mathcal{S}^+$ a une structure de *cône* : $0 \in \mathcal{S}^+$, $\mathcal{S}^+$ est stable par $+$, et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathcal{S}^+$, $\lambda u \in \mathcal{S}^+$.

$\mathcal{S}^{++}$ a une structure de *cône pointé* : $\mathcal{S}^{++}$ est stable par $+$, et si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $u \in \mathcal{S}^{++}$, $\lambda u \in \mathcal{S}^{++}$.

Propriétés : Soit E euclidien.

- Si $v \in \mathcal{L}(E)$, alors $u = v^* v \in \mathcal{S}^+(E)$; si de plus $v \in GL(E)$, alors $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.
- inversement, si $u \in \mathcal{S}^+(E)$, alors $\exists v \in \mathcal{L}(E)/u = v^* v$. Si $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, alors $\exists v \in GL(E)/u = v^* v$.
- Plus précisément, $\forall u \in \mathcal{S}^+(E)$, $\exists v \in \mathcal{S}^+(E)/u = v^2$, et $\forall u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, $\exists v \in \mathcal{S}^{++}(E)/u = v^2$,

Exercice : dans cette dernière propriété, v est unique.

Décomposition us : $\forall u \in GL(E)$, $\exists s \in \mathcal{S}^+(E)$, $\exists v \in \mathcal{O}(E)$ tels que $u = vs$.

Cas des matrices : On dit que $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique ***positive*** si ${}^tM = M$ et $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX \geqslant 0$. M est ***définie positive*** si de plus $\forall X \neq 0$, ${}^tXMX > 0$. On note de même $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus, $M \in \mathcal{S}^+$ ssi $\exists T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $M = {}^t TT$; $M \in \mathcal{S}^{++}$ ssi $\exists T \in GL_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $M = {}^t TT$.

4.3 Réduction des formes quadratiques

E un ev euclidien, $\forall l \in E^*$, $\exists! a \in E/\forall x \in E$, $l(x) = (a \mid x)$. Si $a \neq 0$, a est un vecteur normal à $\ker l$.

Soit f une fbs, $\exists! u \in \mathcal{L}(E)/u^* = u$ tel que $\forall x, y \in E$, $f(x, y) = (u(x) \mid y)$.

Corollaire : il existe un base $\mathcal{B}$ orthonormale pour le produit scalaire aussi orthogonale pour f.

5 Endomorphismes orthogonaux

E euclidien.

5.1 Généralités

$u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal ssi :

1. $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$ ssi
2. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$ ssi
3. $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$

Corollaire : soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale, $u \in \mathcal{O}(E)$ ssi $M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note $SO(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)/ \det u = +1\}$.

5.2 Génération de $\mathcal{O}(E)$

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des symétries par rapport à des hyperplans de E, $\dim E = n$. $\mathcal{H}$ engendre $\mathcal{O}(E)$; plus précisément, si $u \in \mathcal{O}(E)$, $\exists k \in \mathbb{N}/ \ 0 \leqslant k \leqslant n$ et $\exists \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathcal{H}/u = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$.

5.3 Classification des éléments de $\mathcal{O}(E)$ lorsque $\dim E = 3$

$u \in \mathcal{O}(E)$; on écrit $u = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$ avec k minimal.

- Si $k = 0$, alors $u = Id$.
- Si $k = 1$, u est une symétrie par rapport à un plan.
- Si $k = 2$, $u = \sigma_1 \circ \sigma_2$ est une rotation (d'angle différent de 2π). Son axe est $\ker(\sigma_1 - Id) \bigcap \ker(\sigma_1 - Id)$. Une fois orientés E et l'axe par le choix d'un vecteur unitaire $\vec{k}$, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où θ ne dépend plus de la façon de compléter $\vec{k}$ en une BOND $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E. On a de plus : $\sin\theta = [x, u(x), k]_{mixte}$.
- Si $k = 3$, $u = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$; $\det u = -1$ donc $\det -u = 1$. $-u$ est donc une rotation d'angle différent de $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.4 Réduction générale des endomorphismes orthogonaux

$u \in \mathcal{O}(E)$, $E_1 = \ker(u - Id)$, $E_{-1} = \ker(u + Id)$. Il existe des plans vectoriels $H_1, \ldots, H_m$ (avec éventuellement $m = 0$) stables par u tels que $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1} \overset{\perp}{\oplus} H_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} H_m$. Remarque : $\operatorname{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Si $\mathcal{B}$ est une BON adaptée, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_{\dim E_1} & & & & \\ & -I_{\dim E_{-1}} & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

6 Projections orthogonales

Soit E préhilbertien réel

6.1 Projections orthogonales sur un sev de dimension finie

Soit F sev de E de dimension finie ; $\forall x \in E$, $\exists! y \in F/y - x \in F^\perp$. Cela montre que $E = F \oplus F^\perp$. Avec ces notations, $\forall z \in E$, $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$ avec égalité ssi $z = y$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ BON de F, $\forall x \in E$, $y = \sum_{i=1}^{m} (e_i \mid x) e_i$.

Corollaire : $(F^\perp)^\perp = F$.

6.2 Propriétés des projecteurs orthogonaux

$(e_1, \ldots, e_m)$ une famille orthonormale, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. $p : x \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{m} (e_i \mid x) e_i$ est un projecteur, $\ker p = F^{\perp}$ et $\mathrm{Im}(p) = F$. p est de plus symétrique positif et $1-$ lipschitzien, c'est à dire $\forall x, y \in E$, $\|p(x) - p(y)\| \leqslant \|x - y\|$.

Si E est euclidien, tout projecteur autoadjoint est orthogonal et tout projecteur $1-$ lipschitzien est orthogonal.

Formule de Bessel-Parseval :

1. E ev préhilbertien réel, $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_m)$ une famille orthonormale finie. Si $x \in E$, on pose : $x_i = (e_i \mid x)$. Alors $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant \|x\|^2$ avec égalité ssi $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2. E ev préhilbertien réel, $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale infinie. Si $x \in E$ on pose $x_i = (e_i \mid x)$. La série positive $\{x_i^2\}$ est convergente et $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2 \leqslant \|x\|^2$ avec égalité ssi $x \in \overline{\mathrm{Vect}(\mathcal{F})}$ (adhérence de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$).