Une fonction f sera dite régulière en x de $\mathbf{R}$, si $f(x)$ est la moyenne arithmétique des limites à droite et à gauche de f en x.

I. — Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, continue par morceaux. Au réel h strictement positif, on associe la fonction f_h définie sur $\mathbf{R}$ par

$$(1) \qquad f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

1° Montrer que, quel que soit $h > 0$, la fonction f_h est définie sur $\mathbf{R}$ et bornée sur tout segment.

2° Montrer que la fonction f_h est continue.

3° Étudier, pour x fixé, la limite de $f_h(x)$, quand h tend vers 0.

4° Quand la fonction f est supposée de plus régulière pour tout x de $\mathbf{R}$, la limite des fonctions f_h quand h tend vers 0 est-elle toujours uniforme sur $\mathbf{R}$?

II. — Soit une fonction φ, définie sur $\mathbf{R}$, continue par morceaux, nulle hors d'un intervalle fermé borné $I = [-\alpha, \alpha]$ $(\alpha > 0)$. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, continue par morceaux. On considère les fonctions, notées $f * \varphi$ et $\varphi * f$, définies sur $\mathbf{R}$ par

$$(2) \qquad (f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(x-t)\, dt \qquad \text{et} \qquad (3) \qquad (\varphi * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, f(x-t)\, dt.$$

1° Justifier l'existence des intégrales (2) et (3) et comparer les fonctions $f * \varphi$ et $\varphi * f$.

2° Déterminer une fonction φ_h telle que, pour la fonction f_h définie par (1), on ait $(f * \varphi_h)(x) = f_h(x)$.

3° On dira qu'une fonction ρ, définie sur $\mathbf{R}$, vérifie l'hypothèse (H), si elle satisfait aux conditions suivantes :

$$(\mathrm{H}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a) & \rho \text{ est continue, à valeurs positives, nulle en dehors} \\ & \quad \text{d'un intervalle fermé borné } [-\alpha, \alpha] \ (\alpha > 0); \\ b) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\, dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho(t)\, dt = 1. \end{array} \right.$$

Soit ρ une fonction vérifiant (H). Montrer que pour chaque entier strictement positif, n, la fonction ρ_n définie par

$$(4) \qquad \rho_n(x) = n\rho(nx)$$

vérifie (H).

Montrer que si f est continue par morceaux, et continue en x_0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\rho_n * f)(x_0) = f(x_0)$.

Si ρ est supposée paire, calculer en x, point de discontinuité de f continue par morceaux, la limite, quand n tend vers l'infini, de $(\rho_n * f)(x)$.

4° On considère les fonctions g_n (n entier strictement positif), définies sur $\mathbf{R}$, par

$$(5) \qquad g_n(x) = (1-x^2)^n \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| > 1.$$

a) Démontrer qu'il existe des constantes a_n (que l'on ne demande pas de calculer) telles que les fonctions h_n, définies par $h_n(x) = \dfrac{1}{a_n} g_n(x)$, vérifient (H).

b) Démontrer que pour chaque δ appartenant à $]0, 1]$, les fonctions h_n convergent uniformément vers 0 sur chacun des segments $[-1, -\delta]$ et $[\delta, 1]$ quand n tend vers l'infini.

5° Soit une fonction f, continue sur $\mathbf{R}$, nulle hors de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

a) Montrer que la suite des fonctions $(h_n * f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer qu'il existe des polynômes P_n tels que pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ on ait $P_n(x) = (f * h_n)(x)$.

6° En déduire que pour toute fonction g continue dans un intervalle fermé borné $[a, b]$, il existe une suite de polynômes Q_n tels que, pour tout x de $[a, b]$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(x) = g(x)$, cette limite étant uniforme sur $[a, b]$.

III. — Dans cette partie on utilise le résultat de la question 6°, du paragraphe II. Les deux questions A et B sont indépendantes.

A) Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, continue par morceaux, nulle hors de $[a, b]$, telle que, pour tout entier n $(n \geqslant 0)$, on ait $\displaystyle\int_a^b f(t)t^n\, dt = 0$.

Montrer alors que f est nulle sur $[a, b]$, sauf peut-être aux points où f est discontinue.

B) Soit f une fonction définie continue sur $[0, 1]$. Pour n entier strictement positif on pose

$$(6) \qquad B_n(f)(t) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right)(1-t)^{n-p}t^p, \qquad \text{où} \quad C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}.$$

1° On pose $f_0(t) = 1$ et $f_m(t) = t^m$ pour m entier strictement positif.

a) Montrer que pour $n > m$, il existe un scalaire $u_{m,n}$ et un polynôme $Q_{m,n}(t)$ de degré $m-1$, au plus (polynôme nul pour $m = 0$), tels que $B_n(f_m)(t) = u_{m,n}t^m + \frac{1}{n}Q_{m,n}(t)$.

b) Montrer que, pour m fixé, les scalaires $u_{m,n}$ tendent vers 1 quand n tend vers l'infini.

c) Montrer que les coefficients de $Q_{m,n}(t)$ sont majorés en valeur absolue, par une constante A_m, indépendante de n.

2° En déduire que, pour toute fonction polynôme S, les polynômes $B_n(S)$ convergent uniformément vers S sur $[0, 1]$ quand n tend vers l'infini.

3° Montrer que pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, les polynômes $B_n(f)$ convergent uniformément vers f sur $[0, 1]$ quand n tend vers l'infini.