D.H. n°6 pour le 13 novembre 2009

On pose $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on définit la suite dite de FIBONACCI par

$$\mathrm{F}_1 = 1, \quad \mathrm{F}_2 = 1 \text{ et } \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_{n-2} \text{ si } n \geqslant 3$$

On remarquera que $\omega^2 = \omega + 1$ et, dans la mesure du possible, on utilisera cette propriété de préférence à l'expression initiale de ω. On notera $\overline{\omega}$ l'autre racine *réelle* de l'équation $x^2 = x + 1$.

PARTIE I

I.1. **a.** Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n = +\infty$.

b. Pour tout $n \geqslant 2$, calculer $\mathrm{F}_n^2 - \mathrm{F}_{n-1}\mathrm{F}_{n+1}$.

c. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n} - \frac{\mathrm{F}_n}{\mathrm{F}_{n-1}}, \quad n \geqslant 2$$

I.2. **a.** Pour tout $n \geqslant 2$, vérifier que $\omega = \dfrac{\mathrm{F}_{n+1}\,\omega + \mathrm{F}_n}{\mathrm{F}_n\,\omega + \mathrm{F}_{n-1}}$.

b. Prouver les inégalités suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\mathrm{F}_{2n+2}}{\mathrm{F}_{2n+1}} < \omega < \frac{\mathrm{F}_{2n+1}}{\mathrm{F}_{2n}} \text{ et } 0 < \omega - \frac{\mathrm{F}_{2n+2}}{\mathrm{F}_{2n+1}} < \frac{1}{\mathrm{F}_{2n+1}\mathrm{F}_{2n}}$$

Trouver la nature et la limite éventuelle de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

PARTIE II

II.1. Exprimer F_n en fonction de ω, $\overline{\omega}$, n et $\sqrt{5}$.
N.B. cette expression sera utile dans certaines questions mais peut conduire à de longs calculs si elle est utilisée sans discernement.

II.2. Prouver, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $\omega^k + \overline{\omega}^k \in \mathbb{Z}$.

II.3. En déduire que si n divise m alors F_n divise F_m dans $\mathbb{N}$.

PARTIE III

On note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du réel x.

III.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

a. Prouver que $\mathrm{E}(\mathrm{F}_{2n-1}\omega) = \mathrm{F}_{2n}$.

b. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{F}_{2n}\omega)$ et $\mathrm{E}(\mathrm{F}_{2n}\omega^2)$.

On note B l'ensemble des couples $(\mathrm{E}(n\omega^2),\mathrm{E}(n\omega))$ quand n parcourt $\mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{B} = \{(\mathrm{E}(n\omega^2),\mathrm{E}(n\omega)) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

III.2. Montrer que $\mathrm{B} = \{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid q = \mathrm{E}((p-q)\omega)\}$.

III.3. Montrer que $\mathrm{B} = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid 0 < p - q\omega < \dfrac{1}{\omega}\right\}$. Ce résultat sera utile pour la suite.

III.4. On note I l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients entiers strictement positifs, vérifiant la condition

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{I} \Leftrightarrow \forall (p,q) \in \mathrm{B}, \quad (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{B}, \quad \text{où } \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

a. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{E}(n\omega^2)}{\mathrm{E}(n\omega)}$.

Montrer que, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{I}$, alors $\omega = \dfrac{a\omega + b}{c\omega + d}$ et $c = b = a - d$.

b. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$; à tout $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on fait correspondre $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{N}^2$ par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Exprimer $\dfrac{\mathrm{P} - \mathrm{Q}\omega}{a - b\omega}$ en fonction de p, q, ω.
En déduire que si $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ appartient à I, alors $0 < a - b\omega < 1$.
On pourra, entre autres méthodes, introduire $\mathrm{S} = \sup\limits_{(p,q)\in \mathrm{B}} (p - q\omega)$.

c. Montrer que, réciproquement, toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $0 < a - b\,\omega < 1$ est un élément de I.
Montrer que l'on est dans ce cas, en particulier, si $(a,b) \in \mathrm{B}$.

PARTIE IV

Dans cette partie, M désigne la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui appartient à I puisque $0 < 2 - \omega < 1$.

IV.1. On cherche à caractériser les couples $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{B}$ tels que le couple (p,q) défini par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{1}$$

soit élément de B.

a. Montrer que, si l'on a (1) avec $(p,q) \in \mathrm{B}$ alors $0 < \mathrm{P} - \mathrm{Q}\omega < \dfrac{1}{2\omega + 1}$.

b. Montrer que, si $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{B}$ vérifie $0 < \mathrm{P} - \mathrm{Q}\omega < \dfrac{1}{2\omega + 1}$ alors (p,q) défini par (1) est élément de B.

IV.2. À tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on associe $\varphi(x,y) = x^2 - xy - y^2$.
Dans cette question, on étudie l'ensemble $\mathrm{C} = \{(p,q) \in \mathrm{B} \mid \varphi(p,q) = 1\}$.

a. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $(\mathrm{F}_{n+1},\mathrm{F}_n) \in \mathrm{C}$?

b. Soit (p,q) un élément de C. Montrer que $0 < p - q\omega < \dfrac{1}{\sqrt{5}q}$.
En déduire que $0 < p - q\omega < \dfrac{1}{2\omega + 1}$ sauf pour une valeur de q que l'on précisera.
Montrer que tout élément de C est de la forme $(\mathrm{F}_{2n+1},\mathrm{F}_{2n})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.3. On note $\Phi = \{\varphi(p,q) \mid (p,q) \in \mathrm{B}\}$.

a. Soit a un élément de Φ et (p,q) un élément de B tels que $\varphi(p,q) = a$ et que

$$(\forall (p',q') \in \mathrm{B}), \quad (\varphi(p',q') = a) \Rightarrow (q' \geqslant q)$$

Montrer successivement $p - q\omega > \dfrac{1}{2\omega + 1}$ et $\dfrac{a}{q^2} > \left(\dfrac{p}{q} - \omega\right)\sqrt{5}$.
En déduire $q < \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) a$.

b. Se servir de ce qui précède pour trouver la liste des éléments de Φ compris, au sens large, entre 1 et 10.

PARTIE V

On pose $\mathrm{A}' = \{\mathrm{E}(p\omega) \mid p \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathrm{A}'' = \mathrm{E}(q\omega^2 \mid q \in \mathbb{N}^*\}$.
On veut montrer que $(\mathrm{A}',\mathrm{A}'')$ réalise une partition de $\mathbb{N}^*$.

V.1. On fait l'hypothèse : $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, $\mathrm{E}(p\omega) = \mathrm{E}(q\omega^2)$.
En déduire que $p = \mathrm{E}(q\omega)$ où $p = \mathrm{E}(q\omega) + 1$.
Montrer que, dans chacun des deux cas, on aboutit à une contradiction.

V.2. Montrer que l'ensemble des entiers compris, au sens large, entre 1 et F_{2n+2} s'écrit

$$\mathrm{A}'_n \cup \mathrm{A}''_n \text{, avec } \begin{cases} \mathrm{A}'_n = \{\mathrm{E}(k\omega) \mid k \in \mathbb{N}^*, \quad k \leqslant \mathrm{F}_{2n+1}\} \\ \mathrm{A}''_n = \{\mathrm{E}(k\omega^2) \mid k \in \mathbb{N}^*, \quad k \leqslant \mathrm{F}_{2n}\} \end{cases}$$

Conclure.

V.3. Montrer que ω est le seul réel $\vartheta > 1$ tel que

$$(\{\mathrm{E}(p\vartheta) \mid p \in \mathbb{N}^*\}, \quad \{\mathrm{E}(q\vartheta^2) \mid q \in \mathbb{N}^*\})$$

soit une partition de $\mathbb{N}^*$.