ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1996

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
OPTION M
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - M.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M, comporte 6 pages.

Nombres algébriques et nombres transcendants.

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ est un sous-corps du corps des réels $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{K}$. Par définition, un réel α est algébrique sur le corps $\mathbb{K}$ si et seulement si le réel α est racine d'un polynôme P, autre que le polynôme nul, appartenant à $\mathbb{K}[X]$. Dans le cas contraire, le réel α est transcendant sur le corps $\mathbb{K}$.

Le but de ce problème est d'établir des propriétés simples des nombres algébriques et transcendants sur un corps $\mathbb{K}$, d'en donner des exemples lorsque le corps $\mathbb{K}$ est celui des rationnels puis d'appliquer les résultats obtenus pour caractériser des figures géométriques constructibles "à la règle et au compas".

Première Partie

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$ et α un réel algébrique sur le corps $\mathbb{K}$; désignons par $\mathfrak{J}(\alpha)$ l'ensemble des polynômes P appartenant à $\mathbb{K}[X]$ qui admettent α comme racine :

$$\mathfrak{J}(\alpha) = \{ P \mid P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) = 0 \}.$$

I-1°) $\mathfrak{J}(\alpha)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$:

a. Démontrer que $\mathfrak{J}(\alpha)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En déduire l'existence d'un polynôme M_α unitaire (le coefficient du terme de M_α de plus haut degré est égal à 1) unique tel que $\mathfrak{J}(\alpha)$ soit l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ proportionnels à M_α dans $\mathbb{K}[X]$.

$$\mathfrak{J}(\alpha) = \{ P \mid \exists\, Q \in \mathbb{K}[X] ; P = M_\alpha . Q \}.$$

b. Démontrer que, pour qu'un polynôme P, appartenant à $\mathbb{K}[X]$, unitaire et irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, soit le polynôme M_α, il faut et il suffit que le réel α soit racine du polynôme P.

Par définition le polynôme M_α est le <u>polynôme minimal</u> de α sur $\mathbb{K}$, le degré du polynôme M_α, noté $d(\alpha, \mathbb{K})$, est le <u>degré</u> de α sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathbb{K}[\alpha]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par la famille des réels $1, \alpha, \ldots, \alpha^q, \ldots$: $\mathbb{K}[\alpha] = \{x \mid x = \sum_{p=0}^{q} x_p \alpha^p, q \in \mathbb{N}, x_p \in \mathbb{K}\}$. Il est admis que l'ensemble $\mathbb{K}[\alpha]$ est, pour les lois de composition somme et produit, un anneau.

I-2°) <u>Le degré de α sur $\mathbb{K}$ est égal à 1</u> :

Le réel α et le corps $\mathbb{K}$ étant donnés, démontrer l'équivalence entre les affirmations suivantes :

i/ le réel α appartient à $\mathbb{K}$, ii/ le degré de α sur $\mathbb{K}$ est égal à 1: iii/ $\mathbb{K}[\alpha]$ est égal à $\mathbb{K}$.

I-3°) <u>Dans cette question le degré de α sur $\mathbb{K}$ est égal à 2</u> .

a. Préciser la dimension de $\mathbb{K}[\alpha]$; démontrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.

b. Démontrer qu'il existe un réel k (k>0) appartenant au corps $\mathbb{K}$ tel que les deux corps $\mathbb{K}[\alpha]$ et $\mathbb{K}[\sqrt{k}]$ soient égaux.

Par définition, dans ce cas ($d(\alpha, \mathbb{K}) = 2$), $\mathbb{K}[\alpha]$ est <u>une extension quadratique</u> de $\mathbb{K}$.

I-4°) <u>Dans cette question le degré de α sur $\mathbb{K}$ est égal à un entier $n \geq 2$</u> :

a. Démontrer qu'à tout réel x appartenant à l'espace vectoriel $\mathbb{K}[\alpha]$ est associé de manière unique un polynôme R de degré inférieur ou égal à $n-1$ appartenant à $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$x = R(\alpha) .$$

En déduire une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[\alpha]$ et sa dimension.

b. Démontrer que, pour tout réel x (différent de 0) de $\mathbb{K}[\alpha]$, le polynôme R ainsi associé est premier avec le polynôme minimal M_α. En déduire l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{K}[X]$ tel que la relation $U(\alpha).R(\alpha) = 1$ ait lieu.

c. Démontrer que l'anneau $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.

d. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{K}[\alpha]$ est le plus petit corps admettant α comme élément, contenant $\mathbb{K}$ et contenu dans $\mathbb{R}$ ($\alpha \in \mathbb{K}[\alpha]$, $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[\alpha] \subset \mathbb{R}$).

Le corps $\mathbb{K}$ est maintenant le corps des rationnels $\mathbb{Q}$. Considérons la suite des polynômes définis, pour tout réel x et pour tout entier naturel n, par les relations :

$$P_0(x) = 1\ ,\ \ P_1(x) = 2x + 1\ \ ;\ \ P_{n+2}(x) = 2\,x\,P_{n+1}(x) - P_n(x)\,.$$

Soit Q_n le polynôme défini par la relation : $Q_n(x) = P_n(\frac{x}{2})$.

I-5°) <u>Propriétés générales des polynômes P_n</u> :

a. Déterminer le degré du polynôme P_n, $n \geq 0$; préciser le coefficient du terme de plus haut degré et le terme constant. Déterminer les polynômes : P_2, P_3, P_4. Démontrer que les coefficients des polynômes Q_n, $n \geq 0$, sont des entiers relatifs.

b. Démontrer que les seules racines rationnelles possibles du polynôme Q_n sont les entiers 1 et –1. Exprimer l'expression $Q_{n+3}(x) + x\,Q_n(x)$ en fonction du polynôme $Q_{n+1}(x)$. En déduire que les racines rationnelles éventuelles des polynômes Q_{n+3} et Q_n sont les mêmes. Préciser les polynômes P_n qui ont une racine rationnelle.

I-6°) <u>Racines du polynôme P_n</u> :

Soit θ un réel donné compris strictement entre 0 et π ($0<\theta<\pi$). Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de u_0 et de u_1 et la relation de récurrence :

pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 2\,u_{n+1}\cos\theta - u_n$.

a. Déterminer l'expression du terme général u_n de la suite ci-dessus en fonction des réels n, θ et de deux scalaires λ et μ déterminés par θ, u_0 et u_1.

b. Utiliser les résultats précédents pour exprimer le réel $v_n = P_n(\cos\theta)$ en fonction des réels n et θ. En déduire toutes les racines du polynôme P_n notées $x_{k,n}$, $1\leq k\leq n$.

c. Démontrer que les trois nombres réels $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{7})$ et $\cos(\frac{2\pi}{9})$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. Déterminer leur polynôme minimal.

I-7°) <u>Dans cette question le réel α est le nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$, $\cos(\frac{2\pi}{9})$</u> :

a. Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha]$ est trois et qu'une de ses bases est $\mathcal{B} = (1, \alpha, \alpha^2)$. Donner l'expression dans cette base des réels $\cos(\frac{4\pi}{9})$, $\cos(\frac{8\pi}{9})$.

b. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha]$; supposons que, pour tout couple de réels x et y appartenant à $\mathbb{Q}[\alpha]$, la relation $f(x.y) = f(x).f(y)$ ait lieu.
Déterminer les différentes images possibles des réels 1 et α dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que l'ensemble de ces endomorphismes est, pour la loi de composition des endomorphismes, un groupe à trois éléments f_1, f_2, f_3. Déterminer les matrices associées à ces endomorphismes f_1, f_2, f_3 dans la base $\mathcal{B}$.

I-8°) Exemple de nombres transcendants sur $\mathbb{Q}$:

Soit S un polynôme, appartenant à $\mathbb{Q}[X]$, de degré $n \geq 2$, irréductible sur $\mathbb{Q}$.

a. Démontrer qu'il existe un entier naturel C_S (différent de 0) tel que pour tout rationnel $r=\frac{p}{q}$ (le couple (p, q) appartient à $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$) il vienne : $|S(r)| \geq \frac{1}{C_S\, q^n}$.

b. Supposons que le réel α soit une racine de S. Déduire du résultat précédent l'existence d'une constante K, strictement positive, telle que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ appartenant à l'intervalle $[\alpha-1, \alpha+1]$, l'inégalité $|\alpha - r| \geq \frac{K}{q^n}$ ait lieu.

c. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des réels définis par la relation : $t_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}$, $n\geq 0$.

Démontrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente : soit t sa limite. Établir l'inégalité : $|t - t_n| \leq 2\times 10^{-(n+1)!}$. En déduire que le réel t est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

Seconde partie

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats précédents pour caractériser les points du plan qui peuvent être construits "à la règle et au compas".

Soit P un plan affine euclidien orienté. Considérons un repère orthonormé Oxy et $\mathbb{K}$ un sous-corps du corps des réels $\mathbb{R}$; posons :

- $\mathfrak{K}$ est l'ensemble des points du plan P dont chaque coordonnée appartient au corps $\mathbb{K}$.
- $\mathfrak{D}$ est l'ensemble des droites du plan P qui joignent deux points de $\mathfrak{K}$.
- $\mathfrak{C}$ est l'ensemble des cercles du plan P centrés en un point de $\mathfrak{K}$ et de rayon égal à la distance de deux points de $\mathfrak{K}$.

II-1°) Intersection de droites et de cercles appartenant à $\mathfrak{D}$ ou à $\mathfrak{C}$:

Démontrer les résultats suivants :

- Toute droite appartenant à $\mathfrak{D}$ et tout cercle appartenant à $\mathfrak{C}$ admettent au moins une équation cartésienne dont les coefficients sont dans $\mathbb{K}$.
- Le point commun à deux droites sécantes de $\mathfrak{D}$ appartient à $\mathfrak{K}$.
- Un point commun à une droite de $\mathfrak{D}$ et à un cercle de $\mathfrak{C}$ est soit un point de l'ensemble $\mathfrak{K}$, soit un point dont chaque coordonnée appartient à une extension quadratique de $\mathbb{K}$.

Que dire d'un point commun à deux cercles de $\mathfrak{C}$?

Points et réels constructibles :

i/ Soit E un ensemble fini de points du plan P. Considérons toutes les droites passant par deux points de E et tous les cercles centrés en un de ces points de rayon égal à la distance de deux points quelconques de E. Les points d'intersection de ces droites et cercles deux à deux sont dits "points construits à partir de E à la règle et au compas" ou brièvement "construits à partir de E".

ii/ Considérons deux point O et I du plan P. Un point M du plan P est dit "constructible" à partir des points O et I s'il existe une suite finie de points $M_1, M_2, \ldots, M_n = M$ telle que :

- M_1 soit construit à partir de l'ensemble des deux points O et I,
- M_i , $2 \leq i \leq n$, soit construit à partir de l'ensemble $\{O, I, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}\}$.

iii/ Dans la suite seuls le point O et le point I de l'axe Ox sont donnés ; l'abscisse du point I est égale à 1 ; tout point M "constructible à partir des points O et I" est dit brièvement "constructible".

iv/ Un réel est dit "constructible" s'il est égal à l'abscisse d'un point constructible de l'axe Ox ou à l'ordonnée d'un point constructible de l'axe Oy.

II-2°) Exemples de "points construits" et de "points et réels constructibles" :

Démontrer, en justifiant un dessin "effectué à l'aide d'une règle et d'un compas", les propriétés suivantes :

a. Soit E un ensemble de trois points A, B, C du plan P ; ces points sont deux à deux distincts et ne sont pas alignés. Démontrer que le quatrième sommet D du parallélogramme ABCD est un "point construit" à partir de l'ensemble E.
En déduire que si A et Δ sont un point et une droite du plan P donnés, la droite parallèle à la droite Δ passant par A peut être construite "à la règle et au compas".

b. • Démontrer que le point J symétrique du point I par rapport à O est constructible ainsi que le point K porté par l'axe Oy d'ordonnée égale à 1. Il est admis que tout point dont les coordonnées sont des entiers relatifs, est constructible.

• Soient α et β deux réels strictement positifs constructibles ; démontrer que les réels $\alpha+\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\alpha.\beta$ sont constructibles.

• Soit α un réel strictement positif constructible : démontrer que $\sqrt{\alpha}$ est constructible (on pourra considérer le cercle dont un diamètre est le segment joignant le point J au point A $(\alpha, 0)$.

Une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$, de sous-corps du corps des réels est dite avoir la propriété $(\mathcal{P})$ si les deux relations ci-dessous ont lieu :

(P1) $\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \ldots \mathbb{K}_n$,

(P2) Pour tout entier i, $1\leq i\leq n$. le corps $\mathbb{K}_i$ est une extension quadratique du corps $\mathbb{K}_{i-1}$.

II-3°) Une condition nécessaire et suffisante de constructibilité :

a) Soit M un point constructible ; démontrer qu'il existe une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$. de sous-corps du corps des réels $\mathbb{R}$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$ telle que les coordonnées de M appartiennent au corps $\mathbb{K}_n$.

b) Soit une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$; démontrer par récurrence que tous les points M du plan dont les coordonnées appartiennent au corps $\mathbb{K}_n$ sont constructibles.

II-4°) Une condition nécessaire de constructibilité :

a. Soient F, G et H trois sous-corps du corps des réels $\mathbb{R}$ tels que les inclusions $F\subset G\subset H$ aient lieu. Faisons les hypothèses : G est un F-espace vectoriel, H un G-espace vectoriel, leurs dimensions sont finies et respectivement égales aux entiers q et r. Démontrer que H est un F-espace vectoriel de dimension finie. Préciser sa dimension.

b. Considérons une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$, de sous-corps du corps des réels ayant la propriété $(\mathcal{P})$; quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n$?

c. En déduire que, si le réel α est constructible, le degré $d(\alpha, \mathbb{Q})$ est une puissance de l'entier 2.

Note historique : Les Grecs furent embarrassés lorsque la Pythie leur demanda un autel deux fois plus grand dans le temple d'Apollon à Delphes ; la racine cubique de 2 n'est pas constructible !

II-5°) Polygones réguliers constructibles :

Considérons les polygones réguliers à n côtés $(3 \leq n \leq 10)$ inscrits dans le cercle de centre O et de rayon 1. Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_n$ leurs sommets. Supposons le premier sommet A_1 confondu avec le point I. L'abscisse du deuxième sommet A_2 est égale à $\cos(\frac{2\pi}{n})$.

Quels sont, parmi les polygones réguliers à n côtés $(3 \leq n \leq 10)$ inscrits dans le cercle de centre O et de rayon 1, ceux qui sont constructibles ?