Le but de ce problème est l'étude de l'opérateur aux *différences finies*. Dans tout le problème, on désigne par Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe $P(X+1)-P(X)$.

Partie I : généralités algébriques

I.A. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\Delta^n(P)$ en fonction de $P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)$.

I.B. Soit $P \in \operatorname{Ker}\Delta$; exhiber une infinité de zéros de $P(X)-P(0)$; en déduire que $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Conclure quant à $\operatorname{Ker}\Delta$.

I.C. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$. Montrer que $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déduire de ce qui précède que $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis que Δ est surjectif. [*Pour ce dernier point, on pourra remarquer que tout polynôme appartient à un certain* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.]

I.D. Soit des entiers $n \geqslant k \geqslant 1$. Déterminer $\Delta^k(\mathbb{R}_n[X])$. Que peut-on en conclure quant à $\operatorname{Ker}\Delta^k$?

I.E. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$? [*On pourra montrer qu'un tel polynôme* P *est nécessairement de degré impair puis considérer* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\Delta P)(n)$.]

I.F. [*Polynômes de* Hilbert.] On définit $H_0 = 1, H_1 = X$ et $H_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ pour $n \geqslant 2$.

I.F1. Montrer que $\mathscr{H} = (H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

I.F2. Montrer que $\Delta(H_n) = H_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Retrouver alors les expressions du noyau et de l'image de Δ.

I.F3. Montrer que, quels que soient les entiers $n \geqslant 0$ et k, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$. [*On distinguera les cas* $k \geqslant n$, $k < 0$ *et* $0 \leqslant k < n$.]

I.G. Soit $\mathscr{Z}$ l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

I.G1. Si $P \in \mathscr{Z}$, montrer que $\Delta^k(P) \in \mathscr{Z}$ pour tout entier k.

I.G2. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k H_k \in \mathbb{R}[X]$, où les $a_k \in \mathbb{R}$, exprimer les a_k à l'aide des $\left(\Delta^\ell(P)\right)(0)$. En déduire que $P \in \mathscr{Z} \Longrightarrow \forall\, k \in \{0, \ldots, n\}, a_k \in \mathbb{Z}$.

I.G3. Établir la réciproque.

Partie II : liens entre D et Δ

On désigne par $D \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ l'endomorphisme de dérivation.

II.A. Vérifier que D et Δ commutent.

II.B. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, **indexée par** $\mathbb{N}$.

II.B1. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, donner un sens à $A(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \Delta^k(P)$. On rappelle que, par convention, $\Delta^0 = \mathbb{I}$.

II.B2. Montrer que l'application A ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et qu'il est inversible si, et seulement si, $\alpha_0 \neq 0$.

II.C. Dans cette question, on désire montrer que D est l'endomorphisme A obtenu pour une suite (α_k) bien choisie[1].

II.C1. On choisit $n \in \mathbb{N}^*$; montrer qu'il existe des réels $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tels que $\mathrm{D}(\mathrm{H}_n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \Delta^k(\mathrm{H}_n)$. Déterminer β_n en fonction de n (on pourra utiliser $\mathrm{H}'_n(0)$).

II.C2. Montrer que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[X]$, $\quad \mathrm{D}(\mathrm{P}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Delta^k(\mathrm{P})$. [*Commencer par le vérifier pour les éléments de* $\mathscr{H}$.]

II.C3. Énoncer et établir une formule donnant, de même, $\Delta(\mathrm{P})$ à l'aide des $\mathrm{D}^k(\mathrm{P})$ pour tout polynôme P. Voyez-vous un lien entre ces deux expressions ?

Partie III : un autre exercice de concours[2]

Soit $\mathrm{P} = a_0 \mathrm{X}^k + \cdots + a_k \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$**, avec** $a_0 \neq 0$**,** $k \in \mathbb{N}$**. On suppose qu'il existe** $n \in \mathbb{N}^*$ **tel qu'à tout entier** $m \in \mathbb{Z}$ **on puisse associer** $q \in \mathbb{Z}$ **tel que** $\mathrm{P}(m) = q^n$**. Alors, on va montrer qu'il existe** $\mathrm{Q} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ **tel que** $\mathrm{P} = \mathrm{Q}^n$**.** Dans un premier temps, on suppose $a_0 > 0$.

III.A. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, que l'on supposera désormais fixé, tel que $\varphi \ : x \longmapsto \sqrt[n]{\mathrm{P}(x)}$ soit définie pour $x \geqslant x_0$. *On notera que* $\varphi(m)$ *prend des valeurs entières pour les entiers* $m \geqslant x_0$.

III.B. On pose $b = \sqrt[n]{a_0}$; montrer qu'il existe, pour tout entier $p \geqslant 0$, des polynômes $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ tels que l'on ait

$$\varphi(\mathrm{X}+l) = b\mathrm{X}^{k/n}\left(1 + \frac{\mathrm{A}_1(l)}{\mathrm{X}} + \frac{\mathrm{A}_2(l)}{\mathrm{X}^2} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_p(l)}{\mathrm{X}^p} + \mathrm{o}(1/\mathrm{X}^p)\right)$$

lorsque $\mathrm{X} \longrightarrow +\infty$, pour $l \in \mathbb{N}$ fixé. [*On pourra partir d'une expression de la forme* $\mathrm{P}(\mathrm{X}+l) = a_0\mathrm{X}^k + \frac{\mathrm{P}^{(k-1)}(l)}{(k-1)!}\mathrm{X}^{k-1} + \cdots + \mathrm{P}(l)$ *et y factoriser* $a_0\mathrm{X}^k$.]

III.C. On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $[\,x_0\,; +\infty\,[$, et par δ l'endomorphisme qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $g \in \mathscr{E}$ définie par $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$.

III.C1. Montrer que

$$(\delta^r(\varphi))(\mathrm{X}) = b\mathrm{X}^{k/n}\left(\frac{\Delta^r(\mathrm{A}_1)(0)}{\mathrm{X}} + \frac{\Delta^r(\mathrm{A}_2)(0)}{\mathrm{X}^2} + \cdots + \frac{\Delta^r(\mathrm{A}_p)(0)}{\mathrm{X}^p} + \mathrm{o}(1/\mathrm{X}^p)\right)$$

pour tout entier $r > 0$, quand $\mathrm{X} \longrightarrow +\infty$.
Dire comment on peut choisir p et r pour que $(\delta^r(\varphi))(\mathrm{X}) = \mathrm{o}(1)$ quand $\mathrm{X} \longrightarrow +\infty$.

III.C2. Avec un tel choix, montrer que $(\delta^r(\varphi))(m) = 0$ pour m entier assez grand. En s'inspirant des résultats de la partie **I**, en conclure qu'il existe une application polynomiale $\mathrm{Q}_0 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ telle que $\varphi(m) = \mathrm{Q}_0(m)$ pour m entier assez grand et que Q_0 est de la forme $\frac{a}{b}\mathrm{R}$, où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, $a \wedge b = 1$ et $\mathrm{R} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ dont les coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble.

III.C3. Montrer que les fonctions polynomiales P et $\frac{a^n}{b^n}\mathrm{R}^n$ sont égales, puis[3] que $b = 1$. Conclure alors.

III.D. Étudier enfin le cas où $a_0 < 0$.

1. Exercice de l'X, 2002.
2. Ulm 2001.
3. Difficile !