Devoir de Mathématiques n°4

Kévin Polisano
MP*

Jeudi 8 octobre 2009

Résultats préliminaires

1. a) $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on sépare partie réelle et imaginaire de chaque coefficient $P = R + iJ$.

b) $A = PBP^{-1} \Leftrightarrow AP = PB \Leftrightarrow A(R+iJ) = (R+iJ)B \Leftrightarrow (AR - RB) + i(AJ - JB) = 0$.

En identifiant il vient $AR = RB$ et $AJ = JB$. Ainsi on a pour tout $t \in \mathbb{C}$:

$$(AR - RB) + t(AJ - JB) = 0 \Leftrightarrow A(R+tJ) = (R+tJ)B$$

c) On considère la fonction polynomiale définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \det(R+tJ)$.

S'il n'existait aucun t tel que $\det(R+tJ) \neq 0$ alors la fonction serait identiqument nulle sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{C}$ aussi. Absurde puisque $\det(R+iJ) \neq 0$ (P inversible). Donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R+t_0J) \neq 0$. Notons $Q = R + t_0J$ qui est dans $\mathcal{M}_n$ et inversible et qui vérifie $AQ = QB$ soit en multipliant à droite par l'inverse :

$$A = QBQ^{-1}$$

2. a) Classique : le degré est impair donc les limites infinies sont distinctes, et comme la fonction polynomiale associée est continue, on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires.

b) Les éventuelles valeurs propres de A sont racines du polynôme caractéristique $\det(A - XI_n)$ de degré n. Si n était impair, d'après a) il admettrait une racine réelle donc A possèderait une valeur propre réelle. Donc nécesairement si A vérifie (P_A) alors n est pair.

Partie I

A.1.a) On doit avoir $s_1(e_1) = e_1$ et $s_1(e_2) = -e_2$ d'où :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) On multiplie matriciellemnt $M(0,1)S_1$ et on obtient S_2 la matrice de $u \circ s_1$ dans la base canonique :

$$S_2 = M(0,1)S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $S_2^2 = I_2$ donc $s_2 = u \circ s_1$ est une symétrie, vérifiant $s_2(e_1) = e_2$ et $s_2(e_2) = e_1$. Dans le plan défini par (e_1, e_2) cela revient géométriquement à échanger e_1 et e_2 soit d'effectuer une symétrie par rapport à la première bissectrice. Donc $s_2 = u \circ s_1$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1 - e_2)$.

$$u \circ s_1 = s_2 \Leftrightarrow u = s_2 \circ s_1$$

A.2 Je traite directement la question c) étant plus générale, a) et b) en découlent.

c) Soit b l'endomorphisme canoniquement associé à B. En utilisant l'indication, voyons si on peut compléter e_1 en une base (e_1, e_2') dans laquelle b est représenté par la matrice $M(0,1)$. On doit donc avoir $b(e_1) = e_2'$ et $b(e_2') = -e_1$. C'est en effet le cas puisque :

$$b(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e_2' \text{ et } b(e_2') = B\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$$

La matrice passage de la base canonique à cette nouvelle base est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

On a alors $M(0,1) = Q^{-1}BQ$.

d) On a vu en A.1 que $M(0,1) = S_2S_1$ que l'on peut encore écrire $M(0,1) = Q(Q^{-1}S_2Q)(Q^{-1}S_1Q)Q^{-1}$ d'où :

$$B = (Q^{-1}S_2Q)(Q^{-1}S_1Q)$$

Et $(Q^{-1}S_2Q)^2 = Q^{-1}S_2^2Q = Q^{-1}I_2Q = I_2$, de même $(Q^{-1}S_1Q)^2 = I_2$, donc B est la composée de deux symétries.

A.3 Puisque $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, le point de coordonnées (α, β) est sur le cercle unité, il existe donc $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\alpha = \cos(\theta)$ et $\beta = \sin(\theta)$. La matrice $M(\alpha, \beta)$ est alors une matrice de rotation (d'angle θ). En s'inspirant de la question A.1 on peut considérer la symétrie s_1 suivante :

$$S_1 = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

On a bien $S_1^2 = I_2$ et :

$$M(\alpha, \beta)S_1 = \begin{pmatrix} \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \\ -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

Et on a $(M(\alpha, \beta)S_1)^2 = I_2$ d'où $M(\alpha, \beta)S_1 = S_2$ soit encore $M(\alpha, \beta) = S_2S_1$.

$M(\alpha, \beta)$ est la composée de deux symétries.

A.4 On a cette fois $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 \neq 0$ soit $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 = 1$. On se ramène ainsi à la question précédente, puis on compose par l'homothétie $x \mapsto ax$.

A.5.a) On calcule le polynôme caractéristique de A qui est $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ de discriminant $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc)$. A n'a pas de valeur propre réelle si et seulement si :

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 < 4(ad - bc)$$

b) Calculons maintenant le polynôme caractéristique de $M(\alpha,\beta)$: $X^2 - 2\alpha X + (\alpha^2+\beta^2)$.

Posons $2\alpha = a+d$ et $\alpha^2+\beta^2 = ad-bc$ (soit $\alpha = \frac{a+d}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2} > 0$) de sorte que A et $M(\alpha,\beta)$ ait même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres. Puisque celui-ci est séparablement scindé sur $\mathbb{C}$, A et $M(\alpha,\beta)$ sont diagonalisable sur $\mathbb{C}$ donc s'écrivent $A = PDP^{-1}$ et $M(\alpha,\beta) = Q^{-1}DQ$. Ainsi $A = (PQ)M(\alpha,\beta)(PQ)^{-1}$ donc A et $M(\alpha,\beta)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et d'après la première question préliminaire le sont dans $\mathcal{M}_n$.

c) On a d'après a) $\det(A) > \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

d) Puisque $M(\alpha,\beta)$ est la composée de 2 symétries et une homothétie, A qui lui est semblable aussi en décomposant comme en 2.d).

A.6 On procède comme en 4. en divisant par $\alpha^2+\beta^2$ on obtient une matrice de rotation, donc $M(\alpha,\beta)$ est la composée d'une rotation et d'une homothétie.

B.1 Le polynôme $X^2-1 = (X+1)(X-1)$ qui est séparablement scindé, est un polynôme annulateur de B, donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p$. Les valeurs propres sont parmi les racines de ce polynôme à savoir ± 1. Donc en ordonnant la matrice diagonale à laquelle B est semblable de façon à avoir que des 1 dans les premières colonnes puis -1, on obtient bien $Q^{-1}BQ$ de la forme voulue.

B.2 Je n'ai pas trouvé de méthode pour déterminer P donc j'y suis allé à tâtons, j'ai commencé par chercher P sous la forme d'une matrice diagonale par blocs de la forme $P = \begin{pmatrix} kI_p & 0 \\ 0 & k'I_p \end{pmatrix}$ dont l'inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}I_p & 0 \\ 0 & \frac{1}{k'}I_p \end{pmatrix}$. Mais lors du produit $P^{-1}AP$ le premier bloc n'était jamais nul. Donc j'ai ensuite cherché P sous la forme d'une matrice triangulaire par bloc de la forme $P = \begin{pmatrix} I_p & kI_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ dont l'inverse se voit facilement $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & -kI_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. En effectuant le produit j'obtiens :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} (2-k)B & (-k^2+4k-5)B \\ B & (k-2)B \end{pmatrix}$$

Pour éliminer les blocs diagonaux je prends $k=2$ et j'obtiens (par chance) ce qu'il faut.

B.3 Ici il faut trouver une matrice U inversible de sorte que :

$$U^{-1}(P^{-1}AP)U = (PU)^{-1}A(PU) = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{-1}BQ \\ Q^{-1}BQ & 0 \end{pmatrix}$$

On voit sans trop de mal qu'il faut prendre $U = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.

Partie II

A.1 Le polynôme X^2+1 est annulateur de A et ne possède pas de racines réelles.

A.2 a) EA se déduit de A en échangeant les lignes i et j, et $(EA)E^{-1}$ en échangeant les colonnes i et j de EA.

b) $E = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$ et $E^{-1} = I_n + (\frac{1}{\alpha} - 1)E_{ii}$. EA se déduit de A en multipliant par α la ligne i. Et $(EA)E^{-1}$ en multipliant par $\frac{1}{\alpha}$ la colonne i de EA.

c) Ici on multiplie par la matrice de transvection $E = I_n + \alpha E_{ij}$ d'inverse $E^{-1} = I_n - \alpha E_{ij}$. Ainsi on obtient EA en effectuant $L_i \leftarrow L_i + \alpha E_{ij}$ puis à partir de EA on obtient EAE^{-1} en effectuant $C_i \leftarrow C_i - C_j E_{ij}$.

A.3 a) Supposons que $\forall i \geqslant 2, A_{i,1} = 0$ et notons $A_{1,1} = \lambda \neq 0$ car $A^2 = -I_n$. On a alors :

$$Ae_1 = C_1 = \lambda e_1$$

Et e_1 serait vecteur propre réel de A, absurde par hypothèse. Donc il existe $i \geqslant 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.

b) On se sert des 3 opérations élémentaires présentées en A.2. On commence par échanger les lignes 2 et i pour avoir $A_{i,1} = \alpha$ à l'endroit voulu. Puis on effectue $L_2 \leftarrow \frac{1}{\alpha}L_2$ pour obtenir 1. Enfin on met les autres coefficients de la première colonne égaux à 0 en utilisant ce 1 via l'opération $L_j \leftarrow L_j - a_{j,1}L_2$. Etant donné qu'à chaque opération on transforme la matrice : $M \leftarrow EME^{-1}$ on obtient bien à la fin $A' = PAP^{-1}$.

c) La première colonne de A' est ainsi e_2, i.e $Ae_1 = e_2$. Pour connaître la deuxième colonne on multiplie à gauche par A : $A^2 e_1 = Ae_2$ et comme $A^2 = -I_n$ il vient $Ae_2 = -e_1$.

B.1 Supposons que A possède une valeur propre réelle λ. Alors on aurait

$$\frac{1}{\beta}(A - \alpha I_n)(X) = \frac{1}{\beta}(AX - \alpha X) = \frac{\lambda - \alpha}{\beta} X$$

Et $U = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I_n)$ possèderait aussi une valeur propre réelle, absurde puisque $U^2 = -I_n$.

B.2 D'après A.5 il existe P inversible telle que $PUP^{-1} = \mathrm{Diag}(M(0,1), M(0,1), ..., M(0,1))$ car $U^2 = -I_n$. Or $A = \beta U + \alpha I_n$ d'où : $PAP^{-1} = \beta PUP^{-1} + \alpha I_n$ soit :

$$PAP^{-1} = \beta \mathrm{Diag}(M(0,1), M(0,1), ..., M(0,1)) + \alpha I_n = \mathrm{Diag}(M(\alpha,\beta), M(\alpha,\beta), ..., M(\alpha,\beta))$$

On en déduit que $\det(A) = (\det M(\alpha,\beta))^{n/2} = (\alpha^2 + \beta^2)^{n/2}$.

C.1 Soit P appartenant à ce plan, on a $P(X) = aX^i + bX^j$, et

$$u(P)(X) = (-1)^i a X^{n-1-i} + (-1)^j b X^{n-1-j}$$

Ce plan est stable ssi $n-1-i = i$ (exclut car n est supposé pair) ou $n-1-i = j$ (et $n-1-j = i$) donc

$$i + j = n - 1$$

C.2 On voit en calculant l'image des monômes par u^2 que $u^2 = -I$. On remarque aussi que la matrice A est celle qui représente u dans la base canonique. Or puisque $u^2 = -I$ on sait d'après A.5 que la matrice de u (soit A) est semblable à $\mathrm{Diag}(M(0,1), M(0,1), ..., M(0,1))$.

Partie III

A.1 Dans $\mathbb{R}$ on a $(x-\alpha)^2+\beta^2 \geqslant \beta^2 > 0$ donc le polynôme n'a pas de racine réelle. C'est un polynôme de degré 2 possédant donc 2 racines complexes conjuguées.

A.2 Le polynôme caractéristique de A est $\prod_{k=1}^{p}((X-\alpha_k)^2+\beta_k^2)$ qui n'a pas de racine réelle d'après 1. et qui annule A en vertu du théorème de Cayley Hamilton. En revanche je n'ai pas réussi à montrer que les racines complexes étaient simples..

B.1 C'est clair car $\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ est stable par l'endomorphisme associé à A.

B.2 Supposons que A' possède une valeur propre réelle λ, et soit X_1 un vecteur propre associé, si on calcule :

$$\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on s'aperçoit que λ est aussi valeur propre réelle de A, ce qui est contradictoire.

D'après I.A.5 A' est semblable à une certaine matrice $M(\alpha,\beta)$.

B.3 D'après la question précédente A' et $M(\alpha,\beta)$ ont même polynôme caractéristique $\chi(X) = (X-\alpha)^2+\beta^2$ qui annule donc A' (toujours d'après le théorème de Cayley-Hamilton). Ainsi $\mathrm{Ker}(\chi(A')) = \mathrm{Ker}(0) = E$, mais $\mathrm{Ker}(\chi(A')) \subset \mathrm{Ker}(\chi(A))$ soit :

$$E \subset \mathrm{Ker}((A-\alpha I_n)^2+\beta^2)$$