Devoir de Mathématiques n°13

Kévin Polisano
MP*

Vendredi 19 mars 2010

Partie I : convexité

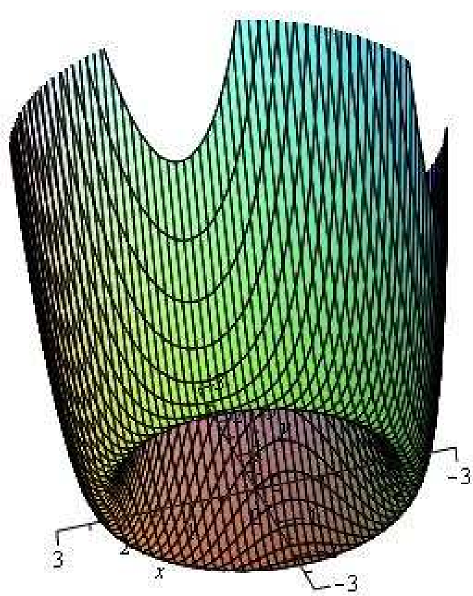
1.a On veut montrer que le min est atteint, et F est continue, ce qui nous suggère d'utiliser le théorème de Heine, mais pour l'appliquer on doit au préalable se ramener à un compact.

Comme $F(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\|u\| > \alpha \Rightarrow F(u) > F(0)$. On va alors considérer l'ensemble $C = \{v \in \mathbb{R}^n, F(v) \leqslant F(0)\}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}^n$ (car image réciproque par F continue du fermé $]-\infty, F(0)]$ de $\mathbb{R}$) et $C \subset B'(0,\alpha)$ donc C est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, d'après le théorème de Borel-Lesbegue C est un compact de $\mathbb{R}^n$.

F est continue donc d'après le théorème de Heine $\exists u \in C, F(u) = \min\limits_{v \in C} F(v)$.

Enfin si v n'appartient pas à C alors $F(v) > F(0) \geqslant F(u)$. Conclusion : $\boxed{F(u) = \min\limits_{v \in X} F(v)}$.

1.b Le minimum n'est en général pas unique, considérons par exemple la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = (x^2 + y^2 - 5)^2$. F est bien continue, vérifie $F(u) \to +\infty$ si $\|u\| \to +\infty$ et atteint son min 0 sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 5$ dans le plan (Oxy).



Si F est supposée de plus strictement convexe alors **le min est unique**. En effet supposons que le min m soit atteint en 2 points distincts $u_1 \neq u_2$, $m = F(u_1) = F(u_2)$, alors $F(tu_1 + (1-t)u_2) < tF(u_1) + (1-t)F(u_2) = tm + (1-t)m = m$ ce qui est absurde par définition du min.

2.a F différentiable sur $\mathbb{R}^n$, donc $F((1-t)u+vt) = F(u+t(v-u)) = F(u)+t(dF)_u(v-u)+o(t)$

$$\frac{F((1-t)u+vt)-F(u)}{t} = (dF)_u(v-u)+o(1)$$

Donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{F((1-t)u+tv)-F(u)}{t} = (dF)_u(v-u)$. Par ailleurs F étant convexe on a :

$$F((1-t)u+tv)-F(u) \leqslant (1-t)F(u)+tF(v)-F(u) = t(F(v)-F(u))$$

D'où :

$$\frac{F((1-t)u+tv)-F(u)}{t} \leqslant F(v)-F(u)$$

Puis en passant à la limite quand $t \to 0$ il vient :

$$(dF)_u(v-u) =< \nabla F(v), v-u > \leqslant F(v)-F(u) \Leftrightarrow \boxed{F(v) \geqslant F(u)+ < \nabla F(u), v-u >} \quad (1)$$

2.b Appliquons l'inégalité (1) aux couples (w,u) et (w,v) :

$$F(u) \geqslant F(w)+ < \nabla F(w), u-w >$$
$$F(v) \geqslant F(w)+ < \nabla F(w), v-w >$$

Avec $w = (1-t)u+tv$ on a $u-w = t(u-v)$ et $v-w = (1-t)(v-u)$ donc on a :

$$F(u) \geqslant F(w) + t < \nabla F(w), u-v >$$
$$F(v) \geqslant F(w) - (1-t) < \nabla F(w), u-v >$$

Multiplions la première inégalité par $(1-t)$ et la seconde par t, puis sommons les :

$$(1-t)F(u)+tF(v) \geqslant F(w) = F((1-t)u+tv)$$

Ainsi F est **convexe**.

3. Le sens $\boxed{\Leftarrow}$ est immédiat, on applique 2.b avec l'inégalité stricte.

Le sens $\boxed{\Rightarrow}$ est plus délicat, on ne peut pas appliquer tel quel la même méthode qu'en 2.a car par passage à la limite dans :

$$\frac{F((1-t)u+tv)-F(u)}{t} < F(v)-F(u)$$

l'inégalité deviendrait large. Pour pallier ce problème on prend $t' \in]0,t]$ et on vérifie que :

$$\frac{F((1-t')u+t'v)-F(u)}{t'} \leqslant \frac{F((1-t)u+tv)-F(u)}{t}$$

En effet la fonction $G : x \mapsto F((1-x)u+xv)$ est strictement convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$G(tx+(1-t)y) = F((1-tx-(1-t)y)u+(tx+(1-t)y)v) = F(t[(1-x)u+xv]+(1-t)[(1-y)u+yv])$$

Puis par stricte convexité de F :

$$G(tx+(1-t)y) < tF((1-x)u+xv)+(1-t)F((1-y)u+yv) = tG(x)+(1-t)G(y)$$

Donc elle vérifie le lemme des 3 cordes, en particulier :

$$\frac{G(t')-G(0)}{t'-0} \leqslant \frac{G(t)-G(0)}{t-0}$$

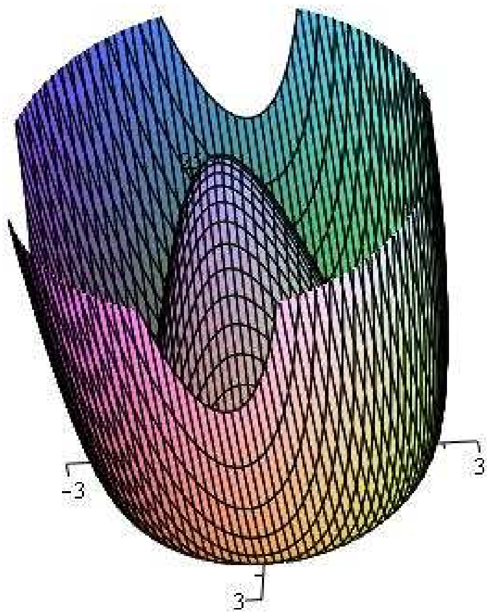
ce que l'on voulait. Il ne reste plus qu'à faire tendre $t' \to 0$ avec t fixé :

$$(dF)_u(v-u) \leqslant \frac{F((1-t)u+tv)-F(u)}{t} < F(v)-F(u)$$

4.a La condition $\nabla F(u)=0$ n'est en général pas suffisante pour que u soit un minimum de F, en effet reprenons notre exemple précédent $F:(x,y)\mapsto (x^2+y^2-5)^2$ qui est bien continue, et vérifie $F(u)\to+\infty$ si $\|u\|\to+\infty$. Le gradient de F est :

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3+4x^2-8x \\ 4x^2y+4y^3-8y \end{pmatrix}$$

Donc $(0,0)$ est un point critique, mais $F(0,0)=25$ tandis que le min de F est 0.



4.b En revanche si F est de plus supposée **convexe** alors la condition devient suffisante puisque d'après (1) :

$$\forall v \in X, F(v) \geqslant F(u) + < \underbrace{\nabla F(u)}_{=0}, v-u >= F(u)$$

Ainsi u est un point de **minimum** de F.

5.a F est convexe, donc on applique de nouveau (1) aux couples (u,v) et (v,u) :

$$F(v) \geqslant F(u) + < \nabla F(u), v-u >$$
$$F(u) \geqslant F(v) + < \nabla F(u), u-v >$$

Puis on somme les deux inégalités et on obtient :

$$\boxed{\forall u,v \in \mathbb{R}^n,\ < \nabla F(u) - \nabla F(v), u-v > \geqslant 0}$$

5.b Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = (1-t)F(u) + tF(v) - F((1-t)u+tv)$.

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(t) = (1-t)u + tv$ et $G = F \circ f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Différentions G : $(dG)_t(h) = (dF)_{f(t)} \circ (df)_t(h)$.
On a directement $(df)_t(h) = h(v-u)$ et comme G est réelle $(dG)_t(h) = G'(t)h$ (de même $(dG)_t(h) = G'(t)h$) d'où : $G'(t) = (dF)_{f(t)}(v-u) =< \nabla F(f(t)), v-u >$ et par conséquent :

$$\boxed{\phi'(t) = F(v) - F(u) - < \nabla F((1-t)u+tv), v-u >}$$

ϕ est continue sur $[0,1]$ et $\phi(0) = \phi(1) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle :

$$\exists t_0 \in [0,1], \phi'(t_0) = 0 \Leftrightarrow < \nabla F((1-t_0)u + t_0 v), v-u >= F(v) - F(u)$$

Par hypothèse on a $\forall u,v \in \mathbb{R}^n, < \nabla F(u) - \nabla F(v), u-v > \geqslant 0$, appliqué à $(1-t)u+tv$ et u on a :

$$< \nabla F((1-t)+tv) - \nabla F(u), (1-t)u+tv-u > \geqslant 0 \Leftrightarrow < \nabla F((1-t)u+tv), v-u > \geqslant < \nabla F(u), v-u >$$

En paticulier pour $t = t_0$ il vient :

$$\boxed{F(v) - F(u) \geqslant < \nabla F(u), v-u >}$$

Ceci étant valable pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^n$ on sait d'après 2.b que F et **convexe**.

6. On va comme en 3. se ramener au cas réel avec $G : t \mapsto F((1-t)u+tv) = F(f(t))$. Vu 5.b :

$$G'(t) = (dF)_{f(t)}(v-u) =< \nabla F(f(t)), v-u >= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(f(t)) \times (v_i - u_i)$$

Calculons la dérivée seconde de G, comme $v-u$ ne dépend pas de t on a :

$$G''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_i}}_{=H}(f(t)) \right)' \times (v_i - u_i)$$

Or comme en 5.b : $(H(f(t)))' = (dH)_{f(t)}(v-u) =< \nabla H(f(t)), v-u >=< \nabla \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right](f(t)), v-u >$

$$G(t) = \sum_{i=1}^{n} < \nabla \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right](f(t)), v-u > \times (v_i - u_i)$$

D'où :

$$G''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(f(t)) \times (v_j - u_j) \right) \times (v_i - u_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla^2 F(f(t))(v-u) \right)_i \times (v_i - u_i)$$

Soit finalement :

$$\boxed{G''(t) =< \nabla^2 F(f(t))(v-u), v-u >=< \nabla^2 F(u+t(v-u))(v-u), v-u >}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ F est convexe, on a alors vu en 3. que $G_{u,w}(t) = F(u+tw)$ est convexe $\forall u, w$ donc :

$$\forall u, w, \forall t, G''_{u,w}(t) =< \nabla^2 F(u+tw)w, w >\geqslant 0$$

Donc si F convexe on a bien $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, < \nabla^2 F(u)v, v >\geqslant 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement si $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, < \nabla^2 F(u)v, v >\geqslant 0$ alors :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, G''_{u,v}(t) \geqslant 0 \ \forall t$$

Donc $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $G_{u,v}$ est convexe, reste à montrer qu'alors F est convexe, en effet :

$$F((1-t)u+tv) = F(u+t(v-u)) = G_{u,w}(t) \leqslant (1-t)G_{u,w}(0) + tG_{u,w}(1) = (1-t)F(u) + tF(v)$$

Si F est $\mathcal{C}^2$ on a donc démontré l'équivalence suivante :

$$\boxed{F \text{ convexe } \Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \ < \nabla^2 F(u)v, v > \geqslant 0}$$

Partie II : Régularisation quadratique

1. Soit l'application $F_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $F_\lambda(u) = \|f-u\|^2 + \lambda\|Au\|^2$.

F est C^2 car $\|.\|$ se présente comme une somme de carré des composantes (donc un polynôme).

$F_\lambda(u+h) =< f-u-h, f-u-h > +\lambda < Au+Ah, Au+Ah >= F_\lambda(u)+\|h\|^2-2(< f-u, h > +\lambda < Au, Ah >)+\|Ah\|^2$

$h \mapsto Ah$ est linéaire, donc continue car $\mathbb{R}^n$ de dimension finie, donc il existe k tel que $\|Ah\| \leqslant k\|h\|$, par conséquent $\|Ah\|^2$ est un $o(h)$ (même $o(h^2)$). Et $h \mapsto 2(\lambda < Au, Ah > - < f-u, h >)$ étant linéaire il s'agit donc de la différentielle de F_λ en u :

$$(dF_\lambda)_u(h) = 2(\lambda < Au, Ah > - < f-u, h >) = 2(< \lambda A^*Au + u - f, h >)$$

Il s'en suit que :

$$\boxed{\nabla F_\lambda(u) = 2(\lambda A^*Au + u - f)}$$

La différentielle de F_λ est l'application $dF_\lambda : u \mapsto (dF_\lambda)_u$. Différentions-là à son tour :

$$dF_\lambda(u+k) = (dF_\lambda)_{u+k} = (dF_\lambda)_u + g(k) \text{ où } g(k) : h \mapsto 2 < \lambda A^*Ak + k, h >$$

g est clairement linéaire donc $(d^2F_\lambda)_u(k) = g(k)$ avec $g(k)(h) = 2 < \lambda A^*Ak + k, h >$. Or :

$$(d^2F_\lambda)_u(k)(h) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_j \partial x_i}(u) h_i k_j =< \nabla^2 F_\lambda k, h >$$

Ceci étant valable pour tout h on en tire $\forall k, \nabla^2 F_\lambda(u)k = 2(\lambda A^*A + I_n)k$ et par suite :

$$\boxed{\nabla^2 F_\lambda(u) = 2(\lambda A^*A + I_n)}$$

2. Calculons la quantité suivante :

$$< \nabla^2 F_\lambda(u)v, v >= 2 < (\lambda A^* A + I_n)v, v >= 2\lambda < A^* Av, v > +2 < v, v >= 2\lambda \|Av\|^2 + 2\|v\|^2 > 0$$

Ceci étant valable pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$ on en déduit que F_λ est **strictement convexe**.

3. On vérifie que F_λ satisfait les conditions de la questions I.1 : elle est continue puisque $\mathcal{C}^2$, $F_\lambda(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$ et est strictement convexe, donc la sous-question 1.b assure l'existence et l'unicité de $u_\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $F_\lambda(u_\lambda) = \min\limits_{v \in \mathbb{R}^n} F_\lambda(v)$.

Et d'après I.4.b la condition $\nabla F(u) = 0$ est une CNS de minimalité pour F en u donc :

$$F_\lambda(u_\lambda) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} F_\lambda(v) \Leftrightarrow \nabla F(u_\lambda) = 0 \Leftrightarrow \boxed{u_\lambda - f + \lambda A^* A u_\lambda = 0}$$

4.a On a montré que $\forall v \in \mathbb{R}^n, < (\lambda A^* A + I_n)v, v > > 0$ donc $\lambda A^* A + I_n$ est symétrique définie positive, donc son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ et il s'en suit que $\lambda A^* A + I_n$ est inversible, on peut donc isoler u_λ :

$$u_\lambda = (\lambda A^* A + I_n)^{-1} f$$

Par continuité de l'inverse, en faisant tendre $\lambda \to 0$ il vient :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda = f}$$

4.b Comme $F_\lambda(u_\lambda)$ est le minimum de F on a en particulier $F_\lambda(u_\lambda) \leqslant F_\lambda(0) = \|f\|^2$ d'où :

$$0 \leqslant \|Au_\lambda\|^2 = \frac{F_\lambda(u_\lambda) - \|f - u\|^2}{\lambda} \leqslant \frac{F_\lambda}{\lambda} \leqslant \frac{\|f\|^2}{\lambda}$$

Par encadrement il vient en passant à la limite :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} Au_\lambda = 0}$$

5. D'après 3. on a la caractérisation des u_λ^i :

$$\begin{array}{c} u_\lambda^1 - f_1 + \lambda A^* A u_\lambda^1 = 0 \\ u_\lambda^2 - f_2 + \lambda A^* A u_\lambda^2 = 0 \end{array}$$

Par soustraction on a :

$$(I_n + \lambda A^* A)(u_\lambda^1 - u_\lambda^2) = f_1 - f_2 \Leftrightarrow u_\lambda^1 - u_\lambda^2 = (I_n + \lambda A^* A)^{-1}(f_1 - f_2)$$

Par ailleurs en développant le produit scalaire :

$$\|(I_n + \lambda A^* A)v\|^2 = \|v\|^2 + \lambda^2 \|A^* Av\|^2 + 2\|Av\|^2 \geqslant \|v\|^2 \Rightarrow \|v\| \leqslant \|(I_n + \lambda A^* A)v\|$$

Puis en faisant $v \leftarrow (I_n + \lambda A^* A)^{-1} v$ on obtient :

$$\|(I_n + \lambda A^* A)^{-1} v\| \leqslant \|v\|$$

D'où la **majoration** suivante :

$$\boxed{\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\| \leqslant \|f_1 - f_2\|}$$

Partie III : Régularisation à croissance linéaire

1. Notons $H(u) =< e, A_\varepsilon(u) >$.

$$H(u+h) = \sum_{i=1}^n (A_\varepsilon(u+h))_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varepsilon^2 + ((Au)_i + (Ah)_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2 + 2(Au)_i(Ah)_i + (Ah)_i^1}$$

$$H(u+h) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2}\left[1 + \frac{2(Au)_i(Ah)_i + (Ah)_i^2}{\varepsilon^2 + (Au)_i^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2}\left[1 + \frac{(Au)_i(Ah)_i}{\varepsilon^2 + (Au)_i^2} + o(h^2)\right]$$

$$H(u+h) = H(u) + \sum_{i=1}^n \frac{(Au)_i(Ah)_i}{(A_\varepsilon(u))_i} + o(h) = H(u) + < B(u), Ah > + o(h)$$

Donc $(dH)_u(h) =< B(u), Ah >=< A^* B(u), h >$ qui est bien linéaire. Ainsi :

$$(dG)_u(h) =< u - f + A^*B(u), h > \Rightarrow \boxed{\nabla G(u) = u - f + A^*B(u)}$$

2. En prenant des inégalités strictes dans la preuve de I.5.a et I.5.b on a :

$$G \text{ strictement convexe } \Leftrightarrow \forall u \neq v \in \mathbb{R}^n, < \nabla G(u) - \nabla G(v), u - v > > 0$$

$$< \nabla G(u) - \nabla G(v), u - v >=< u - v + A^*(B(u) - B(v)), u - v >= \|u - v\|^2 + < A^*(B(u) - B(v)), u - v >$$

$$\alpha =< B(u) - B(v), Au - Av >=< B(u), Au > + < B(v), Av > - < B(u), Av > - < B(v), Au >$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(Au)_i^2}{(A_\varepsilon(u))_i} + \frac{(Av)_i^2}{(A_\varepsilon(v))_i} - \frac{(Au)_i(Av)_i}{(A_\varepsilon(u))_i} - \frac{(Av)_i(Au)_i}{(A_\varepsilon(v))_i} \right)$$

Posons $x_i = (Au)_i$ et $y_i = (Av)_i$, les termes de la somme sont ainsi :

$$\frac{x_i^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + x_i^2}} + \frac{y_i^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + y_i^2}} - \frac{x_i y_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + x_i^2}} - \frac{x_i y_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + y_i^2}} = (x_i - y_i)\left[\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + x_i^2}} - \frac{y_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + y_i^2}}\right]$$

Comme cette expression est symétrique en x, y on peut supposer $x_i > y_i$.

La fonction $f_\varepsilon : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}}$ a pour dérivée :

$$f_\varepsilon'(x) = \frac{\varepsilon^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} > 0$$

Donc f_ε est croissante, donc

$$(x_i - y_i)\left[\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + x_i^2}} - \frac{y_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + y_i^2}}\right] \geqslant 0$$

Finalement :

$$\forall u \neq v \in \mathbb{R}^n, < \nabla G(u) - \nabla G(v), u - v >= \|u - v\|^2 + \underbrace{< B(u) - B(v), A(u - v) >}_{\geqslant 0} \geqslant \|u - v\|^2 > 0$$

Donc G est **strictement convexe**, est continue et vérifie bien $G(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$.

D'après I.1 il existe un unique $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(u) = \min\limits_{v \in \mathbb{R}^n} G(v)$.

D'après I.4 u est caractérisé par

$$\nabla F(u) = 0 \Leftrightarrow u - f + A^* B(u) = 0$$

3. $G_n(u) = \tau G(u) + \frac{1}{2}\|u - u^n\|^2$. Le gradient du deuxième terme est $u^n - u$, ainsi :

$$\nabla G_n(u) = \tau(u - f + A^* B(u)) + u^n - u$$

G_n reste strictement convexe (car on ajoute à τG ($\tau > 0$) une fonction strictement convexe), vérifie encore $G_n(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$ (car la fonction ajoutée est positive), donc on applique de nouveau les résultats du I.1 et I.4 : il existe un unique u^{n+1} tel que $G_n(u^{n+1}) = \min\limits_{v \in \mathbb{R}^n} G_n(v)$ caractérisé par :

$$\nabla G_n(u^{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \tau(u^{n+1} - f + A^* B(u^{n+1})) + u^n - u^{n+1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -u^{n+1} + f - A^* B(u^{n+1})}$$

4. Montrons que les sommes partielles associées à cette série sont majorées :

$$G_n(u^{n+1}) = \tau G(u^{n+1}) + \frac{1}{2}\|u^{n+1} - u^n\|^2 \Leftrightarrow \|u^{n+1} - u^n\|^2 = 2(G_n(u^{n+1}) - \tau G(u^{n+1}))$$

Par définition du minimum on a $G_n(u^{n+1}) \leqslant G_n(u^n) = \tau G(u^n)$ d'où :

$$\|u^{n+1} - u^n\|^2 \leqslant 2\tau(G(u^n) - G(u^{n+1}))$$

On a donc une somme télescopique :

$$\sum_{n=0}^{N} \|u^{n+1} - u_n\|^2 \leqslant 2\tau(G(u^0) - G(u^{N+1})) \leqslant 2\tau G(u^0)$$

compte tenu du fait que G est positive.

On en conclut que la série $\sum \|u^n - u^{n+1}\|^2$ est **convergente**.

5. Vu la caractérisation de u^{n+1} à la question 3. on écrit :

$$u^{n+1} = f - A^* B(u^{n+1}) - \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}$$

Par l'inégalité triangulaire on a :

$$\|u^{n+1}\| \leqslant \|f\| + \|A^* B(u^{n+1})\| + \frac{1}{\tau}\|u^{n+1} - u^n\|$$

Or il est clair que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ les composantes de $B(u)$ sont majorées par 1, donc $\|B(u)\| \leqslant N$. Et comme A^* est linéaire donc continue car en dimension finie, il existe k tel que $\|A^* X\| \leqslant k\|X\|$ et en particulier $\|A^* B(u^{n+1})\| \leqslant k\|B(u^{n+1})\| \leqslant kN$.

Enfin d'après 4. la série $\sum \|u^{n+1}-u^n\|^2$ est convergente, donc nécessairement $u^{n+1}-u^n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ donc est bornée par $M > 0$. Finalement :

$$\|u^{n+1}\| \leqslant \|f\| + kN + \frac{M}{\tau}$$

Ainsi la suite (u^n) est **bornée**.

6. Comme (u^n) est bornée disons par M', tous ses termes appartiennent à la boule fermée $\mathcal{B} = B'(0, M')$. $\mathcal{B}$ est fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ donc compacte, ainsi (u^n) admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathcal{B}$, notons là v, et ϕ l'extractrice telle que $u^{\varphi(n)} \to v$ quand $n \to +\infty$. Etant donné la relation de récurrence obtenue en 3. :

$$\frac{u^{\varphi(n)+1} - u^{\varphi(n)}}{\tau} = -u^{\varphi(n)+1} + f - A^*B(u^{\varphi(n)+1})$$

B n'est pas linéaire mais a le bon goût d'être continu (car A l'est) donc par passage à la limite on obtient :

$$0 = -v + f - A^*B(v)$$

v vérifie la même relation que u, qui est caractérisé de façon unique donc $v = u$. Par conséquent (u^n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence $u \in \mathcal{B}$ donc converge vers celle-ci car $\mathcal{B}$ est compacte.

7. Pour $\varepsilon = 0$ on a $< e, A_\varepsilon(u) >= \sum_{i=1}^N |(Au)_i|$. On imagine bien que c'est la non dérivabilité de la valeur absolue en 0 qui va poser problème. Donc on se ramène au cas réel en considérant la fonction $\delta : t \mapsto < e, A_0(tu) >$. Par linéarité on a $\delta : t \mapsto |t| < e, A_0(u) >$.

Si G était différentiable alors $u \mapsto < e, A_0(u) >$ le serait (car $\frac{1}{2}\|f-u\|^2$) et donc δ le serait, or δ n'est pas dérivable en 0, contradiction. Pour $\varepsilon = 0$, G **n'est pas différentiable** sur $\mathbb{R}^n$.

Partie IV : Méthode de type quasi-Newton

1. $(Av)_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} v_j$, $(C(u)v)_i = \sum_{j=1}^n \frac{A_{i,j}}{(A_\varepsilon(u))_i} v_j = \frac{1}{(A_\varepsilon(u))_i} \sum_{j=1}^n A_{i,j} v_j = \frac{1}{(A_\varepsilon(u))_i} (Av)_i$ d'où :

$$< Av, C(u)v >= \sum_{i=1}^n (Av)_i (C(u)v)_i = \sum_{i=1}^n \frac{(Av)_i^2}{(A_\varepsilon(u))_i} \geqslant 0$$

2. Pour montrer que la relation $\mathcal{G}(u^{n+1}, u^n) = \min_v \mathcal{G}(v, u^n)$ définit une suite (u^n) unique il suffit de montrer qu'à u^n fixé (donc supposé préalablement construit), le minimum de la fonction $v \mapsto \mathcal{G}(v, u^n)$ est atteint en un unique élément qui sera le terme suivant u^{n+1}. On construit ainsi par récurrence la suite (u^n) à partir d'un u^0 donné. Le problème revient donc à montrer que la fonction $v \mapsto \mathcal{G}(v, u^n)$ vérifie les hypothèses du I.1 :

D'après la question précédente on a :

$$\frac{1}{2} < v-u, \mathcal{A}(u)(v-u) >= \frac{1}{2}\|v-u\|^2 + \underbrace{\frac{1}{2} < v-u, A^*C(v-u) >}_{\geqslant 0} \geqslant \frac{1}{2}\|v-u\|^2$$

Par Cauchy-Schwartz : $\frac{|<v-u,\nabla G(u)>|}{\|v-u\|^2} \leqslant \frac{\|\nabla G(u)\|}{\|v-u\|} \to 0$ quand $\|v\| \to +\infty$.

Le terme $< v-u, \nabla G(u) >$ étant négligeable par rapport à $\frac{1}{2}\|v-u\|^2$ quand $\|v\| \to +\infty$ on a :

$$\boxed{\mathcal{G}(v,u) \to +\infty \text{ quand } \|v\| \to +\infty}$$

Montrons alors que $H : v \mapsto \mathcal{G}(v,u)$ est strictement convexe, calculons son gradient en v :

$$\begin{aligned} H(v) &= G(u) - < u, \nabla G(u) > + \tfrac{1}{2} < u, \mathcal{A}(u)(u) > \\ &\quad + < v, \nabla G(u) > + \tfrac{1}{2}(< v, \mathcal{A}(u)v > - < v, \mathcal{A}(u)u > - \underbrace{< u, \mathcal{A}(u)v >}_{=<\mathcal{A}(u)^* u, v>}) \end{aligned}$$

Occupons nous du terme $< v, \mathcal{A}(u)v >$:

$$< v+h, \mathcal{A}(u)(v+h) > = < v, \mathcal{A}(u)v > + < h, \mathcal{A}(u)v + \mathcal{A}(u)^* v > + < h, \mathcal{A}(u)h >$$

avec par Cauchy-Schwartz : $< h, \mathcal{A}(u)h > \leqslant \|h\| \|\mathcal{A}(u)h\| \leqslant \|\|\mathcal{A}(u)\|\| \|h\|^2 = o(h)$.

En passant au gradient il vient :

$$\nabla H(v) = \nabla G(u) + \frac{1}{2}(\mathcal{A}(u)v + \mathcal{A}(u)^* v) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(u)u - \frac{1}{2}\mathcal{A}(u)^* u = \nabla G(u) + \frac{1}{2}(\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(u)^*)(v-u)$$

Et $\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(u)^* = 2I_n + A^* C(u) + (A^* C(u))^*$. Notons $(\gamma_{i,j}) = A^* C(u)$, par produit :

$$\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} \frac{A_{k,j}}{(A_\varepsilon(u))_k}$$

On a alors que $\gamma_{i,j} = \gamma_{j,i}$, donc $A^* C(u)$ est symétrique :

$$\nabla H(v) = \nabla G(u) + v - u + A^* C(u)(v-u)$$

Et on a montré à la question III.1 que $\nabla G(u) = u - f + A^* B(u)$ donc :

$$\nabla H(v) = v - f + A^* B(u) - A^* C(u)u + A^* C(u)v$$

On remarque enfin que $A^* B(u) = A^* C(u)u$ d'où :

$$\nabla H(v) = v - f + A^* C(u)v$$

Comme c'est une application linéaire on a de façon immédiate :

$$\boxed{\nabla^2 H(v) = I_n + A^* C(u)}$$

Il s'en suit :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n - \{0\}, < \nabla^2 H(v)v, v > = < v, v > + < A^* C(u)v, v > = \|v\|^2 + \underbrace{< Av, C(u)v >}_{\geqslant 0} \geqslant \|v\|^2 > 0$$

et H est bien **strictement convexe**.

Par conséquent $H : v \mapsto \mathcal{G}(v, u^n)$ atteint son min en un unique élément u^{n+1} caractérisé par

$$\nabla H(u^{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{u^{n+1} - f + A^* C(u^n) u^{n+1} = 0}$$

3.a On reconnait une simple identité remarquable :

$$a_i - b_i + \frac{1}{2}\frac{b_i^2 - a_i^2}{a_i} = \frac{1}{2a_i}(a_i^2 - 2a_i b_i + b_i^2) = \frac{(a_i - b_i)^2}{2a_i} \geqslant 0$$

3.b Montrons que la quantité suivante est positive :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(v,u) - G(v) &= \tfrac{1}{2}\|f-u\|^2 + \textstyle\sum_{i=1}^n (A_\varepsilon(u))_i + < v-u, \nabla G(u) > \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\|v-u\|^2 + \tfrac{1}{2} < v-u, A^*C(u)(v-u) > - \tfrac{1}{2}\|f-v\|^2 - \sum_{i=1}^n (A_\varepsilon(v))_i\end{aligned}$$

Comme l'énoncé suggère d'utiliser la question précédente, on va se ramener aux composantes des vecteurs. En développant les produits scalaires on a :

$$\frac{1}{2}(\|f-u\|^2 + \|v-u\|^2 - \|f-v\|^2) = \|u\|^2 + < f, v > - < v, u > - < f, u >$$

D'autre part comme $\nabla G(u) = u - f + A^* B(u)$ on a :

$$< v-u, \nabla G(u) > = < v, u > + < u, f > - \|u\|^2 - < v, f > + < v-u, A^* B(u) >$$

Donc la somme de ces deux termes vaut $< v-u, A^* B(u) > = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{(A(v-u))_i (Au)_i}{(A_\varepsilon(u))_i}$.

Enfin d'après la question 1. $< v-u, A^* C(u)(v-u) > = < A(v-u), C(u)(v-u) > = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{(A(v-u))_i^2}{(A_\varepsilon(u))_i}$.

D'où en sommant le tout :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(v,u) - G(v) &= \sum_{i=1}^n \left[(A_\varepsilon(u))_i - (A_\varepsilon(v))_i + \frac{(A(v-u))_i (Au)_i}{(A_\varepsilon(u))_i} + \frac{(A(v-u))_i^2}{(A_\varepsilon(u))_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(A_\varepsilon(u))_i - (A_\varepsilon(v))_i + \frac{1}{2}\frac{(Av)_i^2 - (Au)_i^2}{(A_\varepsilon(u))_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(A_\varepsilon(u))_i - (A_\varepsilon(v))_i + \frac{1}{2}\frac{(A_\varepsilon v)_i^2 - (A_\varepsilon u)_i^2}{(A_\varepsilon(u))_i} \right]\end{aligned}$$

On conclut d'après 3.a que les termes de la somme sont tous positifs et donc :

$$\boxed{G(v) \leqslant \mathcal{G}(v,u)}$$

Partie V : Régularisation non différentiable

1.a Pour $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_\infty \leqslant 1$ on a :

$$< v, Au > = \sum_{i=1}^n v_i (Au)_i \leqslant \|v\|_\infty \sum_{i=1}^n |(Au)_i| \leqslant \|Au\|_1$$

l'égalité ayant lieu pour des $v_i = \text{sgn}((Au)_i).1$, d'où :

$$\boxed{\sup_{\|v\|_\infty \leqslant 1} L(u,v) = H(u)}$$

1.b Partons de l'expression donnée :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\|f-u-Av\|^2 - \|f-Av\|^2 + \|f\|^2) &= \frac{1}{2}(\|f-Av\|^2 - 2<f,u>+2<Av,u>+\|u\|^2 - \|f-Av\|^2 + \|f\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|f\|^2 - 2<f,u>+\|u\|^2 + 2<v,Au>) \\
&= \frac{1}{2}(\|f-u\|^2 + 2<v,Au>) \\
&= L(u,v)
\end{aligned}$$