Devoir de Mathématiques n°11

Kévin Polisano
MP*

Vendredi 22 janvier 2010

Partie I - Cas d'un hyperplan de $L(E)$

I.A.1) Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. $M_B(a) = (a_{i,j})$.

$$a(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k \Rightarrow (e_i | a(e_i)) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} (e_i | e_k) = a_{i,i}$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} (e_i | a(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \mathrm{Tr}(a)$.

I.A.2) $(a, b) \mapsto < a, b >= \mathrm{Tr}(a^* b)$ est bilinéaire (par linéarité de la trace), symétrique :

$$< b, a >= \mathrm{Tr}(b^* a) = \mathrm{Tr}((a^* b)^*) = \mathrm{Tr}(a^* b)$$

car dans une BON B : $M_B(a^*) = {}^t M_B(a)$, positif car d'après 1.

$$< a, a >= \mathrm{Tr}(a^* a) = \sum_{i=1}^{n} (e_i | a^* a(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} (a(e_i) | a(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^2$$

I.A.3) On décompose a de la façon suivante : $a = \frac{1}{2}(a + a^*) + \frac{1}{2}(a - a^*)$ d'où :

$$L(E) = S(E) + A(E)$$

Soit $s \in S(E)$ et $a \in A(E)$ on a $< s, a >= \mathrm{Tr}(s^* a) = \mathrm{Tr}(sa)$ et $< a, s >= \mathrm{Tr}(a^* s) = -\mathrm{Tr}(as)$:

$$2 < s, a >=< s, a > + < a, s >= \mathrm{Tr}(sa) - \mathrm{Tr}(as) = 0 \Rightarrow S(E) = A(E)^{\perp}$$

I.B.1) a) Si $x \in \mathrm{Ker}(a)$, $a(x) = 0 \Rightarrow a^* a(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(a^* a)$.

Si $x \in \mathrm{Ker}(a^* a)$, $0 = (a^* a(x) | x) = (a(x) | a(x)) = \|a(x)\|^2$ d'où $a(x) = 0$ soit $x \in \mathrm{Ker}(a)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(a^* a) = \mathrm{Ker}(a)$ et par le théorème du rang $\mathrm{rg}(a^* a) = \mathrm{rg}(a)$.

b) $a^* a$ est symétrique donc il existe une base B orthonormée telle que $M_B(a^* a)$ soit diagonale (les coefficients étant les valeurs propres). Si toutes les valeurs propres étaient nulles $a^* a$ serait l'endomorphisme nul, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse du rang $r \geqslant 1$. Donc $a^* a$ possède au moins une valeur propre non nulle.

c) On a clairement $\mathrm{Im}(a^* a) \subset \mathrm{Im}(a^*)$ et ces espaces ont même dimension vu a) donc sont égaux.

a^*a étant diagonalisable on a :

$$E = \bigoplus E(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i) \bigoplus \mathrm{Ker}(a^*a)$$

Donc d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(a^*a)) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i)\right)$.

Soit enfin $x \in E(\lambda_i)$, $a^*a(x) = \lambda_i x \Leftrightarrow x = a^*a(\frac{1}{\lambda_i}x)$ d'où $x \in \mathrm{Im}(a^*a)$.

On en déduit que :

$$\mathrm{Im}(a^*) = \mathrm{Im}(a^*a) = \bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i)$$

d) On choisit B BON telle que $M_B(a^*a) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_s, 0, ..., 0)$ (théorème spectral).

Comme $(a^*a(x)|x) = \|a(x)\|^2 \geqslant 0$, $a^*a \in S^+(E)$ donc $\mathrm{Sp}(a^*a) \subset \mathbb{R}^+$.

Puisque les $\lambda_i \geqslant 0$ on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ et ils conviennent car $a^*a(e_i) = \lambda_i e_i = \mu_i^2 e_i$.

Enfin les colonnes étant linéairement indépendantes, pour $i > r$ les μ_i sont nuls.

e) Posons $\forall i \in [\![1, r]\!], f_i = \frac{1}{\mu_i}a(e_i)$ et montrons que la famille (f_i) est ON :

$$(f_i|f_j) = \frac{1}{\mu_i\mu_j}(a(e_i)|a(e_j)) = \frac{1}{\mu_i\mu_j}(e_i|a^*a(e_j)) = \frac{1}{\mu_i\mu_j}(e_i|\mu_i^2 e_j) = \frac{\mu_i}{\mu_j}\delta_{i,j}$$

Par ailleurs comme (f_i) est ON, elle est libre donc on la complète en une base de E.

I.B.2) Soit l'automorphisme orthogonal u qui envoie (f) sur (e).

Ainsi $ua(e_i) = u(\mu_i f_i) = \mu_i u(f_i) = \mu_i e_i$ donc $M_{(e)}(u) = \mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_r, 0, ..., 0)$.

Par conséquent $ua \in S(E)$ et comme ses valeurs propres $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \geqslant 0$ alors $ua \in S^+(E)$.

Et on a vu en b) qu'au moins une valeur propre est strictement positive donc $\mathrm{Tr}(ua) > 0$.

I.C.1) On a $ha(e_i) = h(\mu_i f_i) = \mu_i h(f_i)$, comme les e_i sont orthogonaux entre eux il suffit de prendre $h(f_i) = e_{i+1}$ (et $h(f_n) = e_1$) ou plus généralement n'importe quel dérangement de la base (e) convient.

I.C.2) Montrons que l'adjoint h^* de h est orthogonal à a. En effet d'après ce qui précède :

$$< h^*, a >= \mathrm{Tr}(ha) = \sum_{i=1}^{n}(e_i|ha(e_i)) = 0$$

Comme $a \in H^\perp$ et $h^* \in \mathrm{Vect}(a)^\perp$ il vient $h^* \in H$.

Or $h^* = h^{-1}$ est un automorphisme orthogonal, qed.

Partie II - Cas où $\dim(E) = 3$

II.A.1) Complétons le vecteur k en une base orthonormée $B = (e_1, e_2, k = e_3)$.

$$< a, p_k >= \mathrm{Tr}(a^* p_k) = \sum_{i=1}^{3}(e_i | a^* p_k(e_i)) = \sum_{i=1}^{3}(a(e_i)|p_k(e_i)) = (a(k)|k)$$

car p_k projette orthogonalement sur $\mathrm{Vect}(k)$.

II.A.2) Donnons dans la base B l'expression matricielle de ces endomorphismes :

$$M_B(p_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_B(w_k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_B(r_{\theta,k}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que :

$M_B(r_{\theta,k}) = \cos(\theta)I + (1-\cos(\theta))M_B(p_k) + \sin(\theta)M_B(w_k) \Leftrightarrow r_{\theta,k} = \cos(\theta)Id + (1-\cos(\theta))p_k + \sin(\theta)w_k$

D'où :

$$\begin{aligned} < a, r_{\theta,k} > &= \cos(\theta) < a, I > + (1-\cos(\theta)) < a, p_k > + \sin(\theta) < a, w_k > \\ &= \cos(\theta)\mathrm{Tr}(a) + (1-\cos(\theta))(k|a_k) + \sin(\theta) < a, w_k > \end{aligned}$$

II.A.3) Si $a \in S(E)$ son adjoint $a^* \in S(E)$ s'exprime dans la base B par une matrice :

$$M_B(a^*) = \begin{pmatrix} a' & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Ainsi $M_B(a^*)M_B(w_k) = \begin{pmatrix} b & -a' & 0 \\ d & -b & 0 \\ e & -f & 0 \end{pmatrix}$ d'où :

$$< a, w_k >= \mathrm{Tr}(a^* w_k) = 0 \Rightarrow < a, r_{\theta,k} >= \cos(\theta)\mathrm{Tr}(a) + (1-\cos(\theta))(k|a(k))$$

Si $a \in A(E)$ on a directement $\mathrm{Tr}(a) = 0$ et $(k|a(k)) = 0$ d'où :

$$< a, r_{\theta,k} >= \sin(\theta) < a, w_k >$$

II.B.1) Les endomorphismes s et v sont linéairement indépendants, en effet soit :

$$\lambda s + \mu v = 0 \Rightarrow \lambda \mathrm{Tr}(s) + \mu \mathrm{Tr}(v) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \mu v = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

car v est non nul. Donc $\mathrm{Vect}(s, v)$ est de dimension 2, et puisque $L(E) = \mathrm{Vect}(s, v) \overset{\perp}{\bigoplus} V$:

$$\dim(V) = \dim(L(E)) - \dim(\mathrm{Vect}(s, v)) = 9 - 2 = 7$$

II.B.2) Je ne rédige pas tout c'est assez calculatoire, on somme $\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j (e_i | s(e_j))$ sur tous les $\varepsilon \in \{-1, 1\}^3$ possibles, pour $i = j$ on obtient $\frac{1}{3}\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^3} \mathrm{Tr}(s) = \frac{8}{3}$, quant au reste les termes se compensent car parmi les 2^3 triplets $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, 4 produits $\varepsilon_i \varepsilon_j$ valent 1 et les 4 autres -1.

II.B.3)a) Soit v symétrique, il est donc diagonalisable dans une base de vecteurs propres d'où :

$$(x_\varepsilon|s(x_\varepsilon)) = \sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j(e_i|s(e_j)) = \sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j\lambda_j(e_i|e_j) = \sum_i \lambda_i = \mathrm{Tr}(v) = 0$$

b) Dans l'identité de B.2, si tous les produits scalaires $(x_\varepsilon|s(x_\varepsilon))$ étaient strictement supérieurs à $\frac{1}{3}$ alors la somme serait strictement supérieure à $8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$, absurde, donc l'un des $(x_{\varepsilon_0}|s(x_{\varepsilon_0})) \leqslant \frac{1}{3}$. On prend alors $k = x_{\varepsilon_0}$ et vu a) on a aussi $(k|v(k)) = 0$.

c) On veut alors prouver qu'il existe $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que $r_{\theta,k} \in V$ donc qu'il soit orthogonal à la fois à s et v. Pour v c'est direct étant donné que $\mathrm{Tr}(v) = 0$ et $(k|v(k)) = 0$: $< v, r_{\theta,k} >= \cos(\theta)\mathrm{Tr}(v) + (1-\cos(\theta))(k|v(k)) = 0$. Quant à s, écrivons de même :

$$< s, r_{\theta,k} >= \cos(\theta) + (1-\cos(\theta))(k|s(k))$$

Afin que cette quantité soit nulle on prend donc $\cos(\theta) = \frac{(k|s(k))}{(k|s(k))-1}$ (le dénominateur est non nul car $0 \leqslant (k|s(k)) \leqslant \frac{1}{3}$), et une petite étude de fonction $(x \mapsto \frac{x}{x-1})$ montre que $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$.

II.B.4)a) On veut se placer dans une base orthonormée de vecteurs propres, donc on aura besoin des valeurs propres lors du produit scalaire $< . >$. Comme s est supposé de rang $\leqslant 2$, il n'est pas inversible, donc $\det(s) = \prod \lambda_i = 0$ et une des valeurs propres est nulle. Et sa trace égale 1 donc les valeurs propres sont : λ, $1-\lambda$ et 0. Effectuons maintenant le produit scalaire :

$< s, r_{\pi,k_2} >= -1 + 2(k_2|s(k_2)) = -1 + 2(a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3|\lambda a_2 e_1 + (1-\lambda)b_2e_2) = -1 + 2(\lambda a_2^2 + (1-\lambda)b_2^2)$

Puisque l'on veut l'orthogonalité il faut que la quantité entre parenthèse soit égale à $\frac{1}{2}$, donc prenons $|a_2| = |b_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et comme on veut k_2 unitaire on pose $c_2 = 0$. Puis on affecte à a_2 et b_2 le signe de a_1 et b_1.

b) On vérifie rapidement que les radicandes sont bien positifs sur les 2 intervalles considérés, ce qui suffit pour prouver l'existence de $t \mapsto k(t)$. Quant à $t \mapsto \theta(t)$ il faut étudier l'argument de l'arccos, pour cela formons le produit scalaire, et après développement on obtient

$$(k(t)|s(k(t)) = (1-2t)(k_1|s(k_1)) + 2t(k_2|s(k_2))$$

qui est donc compris entre $(k_1|s(k_1)) \geqslant 0$ et $(k_2|s(k_2)) = \frac{1}{2}$, et l'étude de fonction précédente montre que l'image est incluse dans $[-1, 0]$ et l'arccosinus est bien définie sur cet intervalle, ce qui assure l'existence de $t \mapsto \theta(t)$.

c) On calcule directement $a(t)^2 + b(t)^2 + c(t)^2 = 2t(a_2^2 + b_2^+ c_2^2) + (1-2t)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = 2t - (1-2t) = 1$ et $< s, \rho(t) >= \cos(\theta(t)) + (1-\cos(\theta(t)))(k(t)|s(k(t))) = 0$ vu la définition de $\cos(\theta(t))$.

d) Tout d'abord on remarque que k et θ sont continues (et petit calcul de limite montre la continuité en $t = \frac{1}{2}$).

$$< \rho(t), v >= (1-\cos(\theta(t)))(k(t)|s(k(t))) + \sin(\theta(t)) < a, w_{k(t)} >$$

En outre les produits scalaire et vectoriel sont continus, donc $t \mapsto < \rho(t), v >$ est continue.

On remarque $k(0) = k(1) = k_1$ et $< \rho(0), v >= \sin(\theta(0)) < a, w_{k_1} >$, $< \rho(1), v >= \sin(\theta(1)) < a, w_{k_1} >$, et sachant que $0 \leqslant (k_1|s(k_1)) \leqslant \frac{1}{3}$ on en déduit un encadrement de $\theta(0)$ et $\theta(1)$ et on s'aperçoit que $\sin(\theta(0))$ et $\sin(\theta(1))$ sont de signe contraire.

Enfin par continuité de $t \mapsto < \rho(t), v >$ il existe t_0 tel que $< \rho(t_0), v >= 0$ soit $\rho(t_0) \in V$.