Colle n°11

<u>Énoncé</u> :

On considère l'équation différentielle linéaire (E) suivante $y''+py'+qy=0$,
où les fonctions $p,q:[0,1]\to\mathbb{R}$ sont continues et $q\leqslant 0$.

Montrer que $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ il existe f solution de (E) telle que $f(0)=\alpha$ et $f(1)=\beta$.

Solution : Fixons nous $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Comme (E) est linéaire et que p et q sont $\mathcal{C}^0$ on sait que l'espace vectoriel (S) des solutions de (E) est de dimension 2. Soit (y_0,y_1) une base de (S) alors :

$$\begin{cases} f\in S \\ f(0)=\alpha \\ f(1)=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=\lambda y_0+\mu y_1 \\ \lambda y_0(0)+\mu y_1(0)=\alpha \\ \lambda y_0(1)+\mu y_1(1)=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=\lambda y_0+\mu y_1 \\ \begin{pmatrix} y_0(0) & y_1(0) \\ y_0(1) & y_1(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \end{cases}$$

Il existe une solution au système d'équation en λ,μ pour tout couple (α,β) ssi le noyau de cette matrice est réduit à zéro. On ramène ainsi le problème à montrer que si $f\in(S)$ vérifie $f(0)=f(1)=0$ alors $f=\underline{0}$. Soit donc f solution de (E) vérifiant les conditions aux limites.

• Si $q=0$ alors $f''+pf'=0$, on pose $z=f'$ et on résout l'équa diff du premier ordre $z'+pz=0$:

$$z(x)=A\exp\left(-\int_0^x p(t)dt\right)$$

Comme l'exponentielle est strictement positive, et $A=z(0)=f'(0)$, si f était non nulle $f'(0)\neq 0$ (d'après Cauchy-Lipschitz) donc $z(x)=f'(x)$ serait de signe constant ne s'annulant pas sur $[0,1]$ donc f strictement monotone et $f(0)=f(1)=0$,absurde. Donc f est identiquement nulle.

• Pour $q\neq 0$, supposons de même f non nulle, quitte à prendre l'opposé de f on va considérer que f est positive sur $[0,a]$ où $a>0$ est le deuxième zéro de f (a peut être égal à 1). On va maintenant réinjecter z dans (E) en faisant varier la constante :

$$A'(x)\exp\left(-\int_0^x p(t)dt\right)-p(x)A(x)\exp\left(-\int_0^x p(t)dt\right)+p(x)\exp\left(-\int_0^x p(t)dt\right)+q(x)f(x)=0$$

soit :

$$A'(x)=-q(x)f(x)\exp\left(\int_0^x p(t)dt\right)$$

Comme $q\leqslant 0$ et $f\geqslant 0$ sur $[0,a]$ alors $A'\geqslant 0$ sur $[0,a]$ donc

$$\forall x\in[0,a], A(x)\geqslant A(0)\Rightarrow z(x)=f'(x)\geqslant A(0)\exp\left(-\int_0^x p(t)dt\right)$$

Et on a supposé $A(0)=f'(0)>0$ (car f positive sur $[0,a]$ et si $f(0)=f'(0)=0$ alors par Cauchy-Lipschitz f serait nulle). Donc $f'>0$ et serait strictement monotone donc on ne pourrait avoir $f(a)=0$, d'où la contradiction. ■