Colle n° 8

<u>Énoncés</u> :

I) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Calculer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

II) Montrer que $I(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-(x^2 + \frac{a^2}{x^2}))dx$ existe pour $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour $a > 0$, $I(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \exp(-(x^2 + \frac{a^2}{x^2}))(1 + \frac{a}{x^2})dx$ et en déduire $I(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Solutions :

I) On ramène le problème à deux éléments x, y commutant et tels que $x + y = 1$ et $xy = 1$.

On calcule assez rapidement avec le binôme de Newton et la formule de Pascal les premières valeurs de $S_k = x^k + y^k$:

$$\begin{aligned}
&k = 0 \Rightarrow S_k = 2\\
&k = 1 \Rightarrow S_k = 1\\
&k = 2 \Rightarrow S_k = -1\\
&k = 3 \Rightarrow S_k = -2\\
&k = 4 \Rightarrow S_k = -1\\
&k = 5 \Rightarrow S_k = 1\\
&k = 6 \Rightarrow S_k = 2\\
&k = 7 \Rightarrow S_k = 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

On remarque alors une 6-périodicité, en effet :

$x^{k+6}+y^{k+6} = x^6x^k+y^6y^k = (2-y^6)x^k+(2-x^6)y^k = 2(x^k+y^k)-(y^6x^k+x^6y^k) = 2(x^k+y^k)-x^6y^6(x^{k-6}+y^{k-6})$

Et on conclut par récurrence. Finalement on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Si } k \equiv 0[6] \text{ alors } A^k + A^{-k} = 2I_n\\
\text{Si } k \equiv 1[6] \text{ ou } k \equiv 5[6] \text{ alors } A^k + A^{-k} = I_n\\
\text{Si } k \equiv 2[6] \text{ ou } k \equiv 4[6] \text{ alors } A^k + A^{-k} = -I_n\\
\text{Si } k \equiv 3[6] \text{ alors } A^k + A^{-k} = -2I_n
\end{array}}$$

II) La limite de $f_a : x \mapsto \exp(-(x^2 + \frac{a^2}{x^2}))$ est nulle en 0 et en $+\infty$ $f_a \sim \exp(-x^2) \leqslant \exp(-x)$ donc

$$I(a) \text{ existe } \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

On cherche un changement de variable pour lequel l'argument de l'exponentielle est invariant.

On pose $u = \frac{a}{x}$ ($\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$) on obtient :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-(u^2 + \frac{a^2}{u^2}))\frac{a}{u^2}du$$

Donc $2I(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-(u^2 + \frac{a^2}{u^2}))(1 + \frac{a}{u^2})du$. Montrons que

$$\int_0^{\sqrt{a}} \exp(-(u^2 + \frac{a^2}{u^2}))(1 + \frac{a}{u^2})du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \exp(-(u^2 + \frac{a^2}{u^2}))(1 + \frac{a}{u^2})du$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\sqrt{a}} \exp(-(u^2 + \frac{a^2}{u^2}))(1 + \frac{a}{u^2})du = \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \exp(-(u^2 + \frac{a^2}{u^2}))(1 + \frac{a}{u^2})du$$

Ceci se vérifie en effectuant le même changement de variable $u = \frac{a}{x}$ dans cette intégrale.

Enfin par parité de I (en utilisant la définition) on obtient pour tout $a \neq 0$:

$$\boxed{I(a) = \int_0^{\sqrt{|a|}} \exp(-(u^2 + \frac{a^2}{u^2}))(1 + \frac{|a|}{u^2})du}$$

Et $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. L'avantage de l'intégrale sur un segment est qu'elle légitime le changement de variable $t = u^2 + \frac{a^2}{u^2}$, $dt = 2u(1 - \frac{a^2}{u^4})du = 2u(1 - \frac{a}{u^2})(1 + \frac{a}{u^2})du$.

Et $u(1 - \frac{a}{u^2}) = u - \frac{a}{u} = -\sqrt{(u - \frac{a}{u})^2} = -\sqrt{u^2 + \frac{a^2}{u^2} - 2a} = -\sqrt{t - 2a}$ d'où

$$I(a) = \frac{1}{2} \int_{2a}^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t - 2a}} dt$$

On effectue le changement de variable $y = t - 2a$ ce qui donne :

$$I(a) = \frac{1}{2} \exp(-2a) \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}} dy$$

Dernier changement de variable $y = x^2$ ce qui donne :

$$\boxed{I(a) = \exp(-2a) \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \exp(-2a) I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-2a)}$$