Colle n°7 : Détermination d'une borne inf

Énoncé : Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P = \mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E, \det(M) = 1\}$. $\varphi : M \in E \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMM)$.

1) Montrez que $\varphi_{|P}$ atteint sa borne inférieure.
2) Déterminer $\inf\limits_{M \in P} \varphi(M)$. En quelles matrices est-elle atteinte ?

Solutions :

1) $< A, B >= \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur E. $\varphi : M \in E \mapsto \|M\|^2 \geqslant 0$ est donc $\mathcal{C}^\circ$.

On a $\varphi(I_n) = n$ donc $\inf\limits_{M \in P} \varphi(M) \leqslant n$ donc appartient à la boule $B'(0, n)$.

Or celle-ci étant fermée bornée, elle est compacte, donc $\varphi_{|P}$ $\mathcal{C}^\circ$ y atteint sa borne inférieure.

2) Montrons d'abord que $M \in P \mapsto^t MM$ décrit $\mathcal{S}_1^{++} = \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ de det 1 :

- Pour $M \in P$ la matrice ${}^tMM$ est symétrique (clair) définie positive car :

$$<^t MMX, X >=< MX, Mx >= \|MX\|^2 \geqslant 0 \text{ et } \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X = 0$$

- Pour $S \in \mathcal{S}_1^{++}$, d'après Choleski : $S =^t MM$ avec $\det(S) = 1 = \det(M)^2$.

Ainsi le problème revient à déterminer le minimum de $\mathrm{Tr}(S)$ pour $S \in \mathcal{S}_1^{++}$.

S symétrique réelle donc diagonalisable : $S = P^{-1}DS$ donc ça revient à :

$$\text{minimiser } \sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(S)} \lambda_i \text{ sachant que } \det(S) = \prod_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(S)} \lambda_i = 1$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique on a :

$$\sqrt[n]{\prod \lambda_i} = 1 \leqslant \frac{\sum \lambda_i}{n} \Rightarrow \sum \lambda_i \geqslant n$$

avec égalité si $\forall i, \lambda_i = 1$ soit $S = I_n$.

Conclusion : le min est atteint pour $M \in P$ tel que ${}^tMM = I_n$ donc sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.