Colle n°5 : Espace euclidien

<u>Énoncé</u> : E ev euclidien, $a, b, c, d \in L(E)$ tels que $a^* \circ c$ sym. (1) et $a^* \circ d - c^* \circ b = I$ (2).

1) Montrez que $\mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(c) = \{0\}$.

2) Soit $\lambda \neq \mu$ deux réels, on suppose $(a - \lambda c)(x) = (a - \mu c)(y) = 0$. Montrez que $(c(x)|c(y)) = 0$.

3) En conclure qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a - \lambda_0 c$ soit inversible.

1) En prenant l'adjoint de (2) : $d^* \circ a - b^* \circ c = I$, si $x \in \mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(c)$ on a :

$$d^* \circ \underbrace{a(x)}_{=0} - b^* \circ \underbrace{c(x)}_{=0} = x$$

2) D'une part $0 = (a(x) - \lambda c(x)|c(y)) = (a(x)|c(y)) - \lambda(c(x)|c(y))$

et d'autre part $0 = (a(y) - \mu c(y)|c(x)) = (a(y)|c(x)) - \mu(c(y)|c(x))$.

Or $(a(x)|c(y)) = (x|a^* \circ c(y)) \overset{(1)}{=} (x|c^* \circ a(y)) = (c(x)|a(y))$ d'où :

$$\lambda(c(x)|c(y)) = \mu(c(x)|c(y)) \Rightarrow (c(x)|c(y)) = 0$$

3) Supposons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, a - \lambda c$ soit non inversible. Posons $n = \dim(E)$.

Choisissons $n+1$ valeurs $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, alors $\exists (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ non nuls tels que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad a(x_i) - \lambda_i c(x_i) = 0$$

D'après 2) on a alors par exemple $(c(x_0)|c(x_i)) = 0$ pour n valeurs de i.

On en déduit $c(x_0) = 0$ puis $a(x_0) = 0$ et enfin $x_0 = 0$ d'après 1), d'où la contradiction. ■