Colle n°3 : Déterminants blocs de matrice orthogonale

Énoncé : Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_p,\ B \in \mathcal{M}_{p,q},\ C \in \mathcal{M}_{q,p},\ D \in \mathcal{M}_q$ et $n = p + q$.

Montrer que $det(D) = \varepsilon det(A)$ ($\varepsilon = \pm 1$), et plus précisément si $det(A) \neq 0$:

$$det(D) = det(M)det(A)$$

démo : Puisque $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a $I_n =^t MM = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{{}^tAA +^t CC} & {}^tAB +^t CD \\ {}^tBA +^t DB & {}^tBB +^t DD \end{pmatrix}$.

De même $I_n = M^tM = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & A^tB + B^tD \\ C^tA + D^tC & \boxed{C^tC + D^tD} \end{pmatrix}$.

Par identification des encadrés on tire :

$$\begin{cases} {}^tAA +^t CC = I_p \\ C^tC + D^tD = I_q \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} det(A)^2 = det(I_p -^t CC) \\ det(D)^2 = det(I_q - C^tC) \end{cases}$$

Posons $N = \begin{pmatrix} I_q & C \\ {}^tC & I_p \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_q & -C \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ et remarquons que :

$$NP = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ {}^tC & I_p -^t CC \end{pmatrix}$$

$$PN = \begin{pmatrix} I_q - C^tC & 0 \\ {}^tC & I_p \end{pmatrix}$$

Comme $det(NP) = det(PN)$ il vient $det(I_p -^t CC) = det(I_q - C^tC)$ soit

$$det(A)^2 = det(D)^2 \Rightarrow det(D) = \varepsilon det(A)$$