Colle n°3 : $\mathbf{dim}(F) + \mathbf{dim}(F^{\perp}) = \mathbf{dim}(E)$

Énoncé : Soit E un K-ev et $f : E \times E \to K$ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée.

Montrer que si F est un sev de dimension finie alors $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$.

démo n°1 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de F. $F^{\perp} = \{y \in E / \forall x \in F, f(x,y) = 0\}$.

Comme tout $x \in F$ se décompose sur la base $\mathcal{B}$ on a $y \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall e_i \in \mathcal{B}, f(e_i, y) = 0$.

Les p formes linéaires $g_i : y \mapsto f(e_i, y)$ sont linéairement indépendantes car :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i, y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$$

car $\mathcal{B}$ est une base donc une famille libre.

démo n°2 : f non-dégénérée, l'application $\varphi : y \mapsto (x \mapsto f(x,y))$ est un isomorphisme de E sur E^*.

$\varphi(F)$ est un sev de E^*,

$$(\varphi(F))^{\circ} = \{x \in E / \forall \ell \in \varphi(F), \ell(x) = 0\} = \{x \in E / \forall y \in F, f(x,y) = 0 \forall\} = F^{\perp}$$

car $\ell \in \varphi(F)$ est de la forme $x \mapsto f(x,y)$ et qu'il y a isomorphisme entre $\varphi(F)$ et F.

On sait que $\dim(F^{\perp}) = \dim(\varphi(F)^{\circ}) = \operatorname{codim}(\varphi(F))$.

Et comme φ est un isomorphisme, $\operatorname{codim}(\varphi(F)) = \operatorname{codim}(F)$ d'où :

$$\dim(F^{\perp}) = \operatorname{codim}(F) \Leftrightarrow \dim(F^{\perp}) + \dim(F) = \dim(E)$$