Colle n°2 : Inégalité de Wirtinger et théorème isopérimétrique

Énoncé : Soit l'ensemble de fonctions $E = \left\{ f : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1_m} \mathbb{R}, \text{T-périodique}, \int_0^T f(t)dt = 0 \right\}$.

Montrer que $\forall f \in E, \int_0^T f(t)^2 dt \leqslant A \int_0^T f'(t)^2 dt$ avec A à déterminer. *(Inégalité de Wirtinger)*

démo : Comme f' est C°_m on peut lui appliquer le **théorème de Bessel-Parseval** :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f'(t)^2 dt$$

Par ailleurs $c_n(f') = \frac{2\pi}{T} nic_n(f)$, d'où :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f'(t)^2 dt = \frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2$$

On remarque que $c_0(f) = \int_0^T f(t)dt = 0$ par hypothèse et donc comme pour $n \neq 0, n^2 \geqslant 1$ on a :

$$\int_0^T f'(t)^2 dt = \frac{4\pi^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 \geqslant \frac{4\pi^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

Et en appliquant maintenant le **théorème de Bessel-Parseval** à f il vient :

$$\int_0^T f'(t)^2 dt \geqslant \underbrace{\frac{4\pi^2}{T^2}}_{A} \int_0^T f(t)^2 dt$$

remarque : En utilisant l'écriture réelle on a :

$$\int_0^T f'(t)^2 dt - \frac{4\pi^2}{T^2} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{4\pi^2}{2T} \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2)$$

★ Le cas d'égalité se traduit alors par $a_n = b_n = 0$ pour $n \geqslant 2$ soit f de la forme :

$$f(t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + b \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

* * *

Application :

Ceci permet de démontrer le **théorème isopérimétrique** dans le cas où la frontière est une courbe fermée de classe C^1_m, il stipule que l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par celle-ci est inférieure à l'aire $\mathcal{A}_0$ du disque de même périmètre L. C'est-à-dire avec $L = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{L}{2\pi} \Leftrightarrow \mathcal{A}_0 = \pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$:

$$\boxed{\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}_0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \leqslant \frac{L^2}{4\pi}}$$

démo : Paramétrisons la courbe par $(x(s), y(s))$ où s représente l'abscisse curviligne (donc $s \mapsto x(s)$ et $s \mapsto y(s)$ de période L, et tel que $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$).
On se ramène à $[0, 2\pi]$ en posant $f(t) = x\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)$ et $g(t) = y\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)$. On a donc $\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$.

D'après le **théorème de Green-Riemann** on a $\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} f(t)g'(t)dt$. Et puisque la courbe est fermée on a $\int_0^{2\pi} g'(t)dt = g(2\pi) - g(0) = 0$, et par translation on peut supposer $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$; donc $f, g' \in E$ et on va pouvoir leur appliquer *l'inégalité de Wirtinger* :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} 2f(t)g'(t)dt &= \int_0^{2\pi} (f(t)^2 + g'(t)^2 - (f(t) - g'(t))^2)dt \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} (f'(t)^2 + g'(t)^2)dt = \int_0^{2\pi} \frac{L^2}{4\pi^2} dt = \frac{L^2}{2\pi} \end{aligned}$$

★ Le cas d'égalité ici se rapporte à la remarque *supra* : f de la forme $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. Et on a aussi $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(t) - g'(t))^2 dt = 0$ soit par continuité et positivité de l'intégrande $g' = f$.

$$f'(t)^2 + g'(t)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow (-a\sin(t) + b\cos(t))^2 + (a\cos(t) + b\sin(t))^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

Ainsi il existe $t_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{L}{2\pi} a = \cos(t_0)$ et $\frac{L}{2\pi} b = \sin(t_0)$, d'où :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{L}{2\pi}(\cos(t_0)\cos(t) + \sin(t_0)\sin(t)) = \frac{L}{2\pi}\cos(t - t_0) \\ g(t) = \frac{L}{2\pi}(\cos(t_0)\sin(t) - \sin(t_0)\cos(t)) = \frac{L}{2\pi}\sin(t - t_0) \end{cases}$$

Donc $(f(t), g(t))$ est un cercle de rayon $\frac{L}{2\pi}$.

* * *