Colle n°1

<u>Énoncé</u> : Discutez suivant $z \in \mathbb{C}$ de la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^z}$.

Démo : $z = a + ib$, $\frac{1}{n^z} = \exp(-z\ln n) = \exp(-a\ln n)\exp(-ib\ln n) = \frac{\exp(-ib\ln n)}{n^a}$

$$\sum \frac{1}{n^z} = \sum \frac{\exp(-ib\ln n)}{n^a}$$

• Si $a > 1$, $\sum \frac{1}{n^z}$ converge absolument car :

$$\left|\frac{\exp(-ib\ln n)}{n^a}\right| \leqslant \frac{1}{n^a} \text{ converge}$$

• Si $a \leqslant 0$, le terme général ne tend pas vers 0, donc $\sum \frac{1}{n^z}$ diverge grossièrement.

• Si $0 < a \leqslant 1$ montrons également que la série $\sum \frac{1}{n^z}$ diverge.

<u>Lemme</u> : $f : [n_0, +\infty[\xrightarrow{C^\circ, C^1_m} \mathbb{C}$, avec f' intégrable. $u_n = f(n)$.

$$A_n = u_{n_0} + \cdots + u_n - \int_{n_0}^{n} f(t)dt \text{ a une limite finie}$$

Preuve :

$$A_n - A_{n-1} = u_n - \int_{n-1}^{n} f(t)dt = \int_{n-1}^{n} (f(n) - f(t))dt$$

Faisons une IPP en prenant $\begin{cases} u(t) = f(n) - f(t) \\ v(t) = t - (n-1) \end{cases}$, de sorte que :

$$A_n - A_{n-1} = \underbrace{[uv]_{n-1}^{n}}_{=0} + \int_{n-1}^{n} f'(t)(t-(n-1))dt$$

Sur l'intervalle $[n-1, n]$ on a $|t-(n-1)| \leqslant 1$, d'où :

$$|A_n - A_{n-1}| \leqslant \int_{n-1}^{n} |f'(t)| \times 1 dt$$

Ecrivons les sommes partielles de la série de terme général $|A_n - A_{n-1}|$:

$$|A_{n_0+1} - A_{n_0}| + \cdots + |A_n - A_{n-1}| \leqslant \int_{n_0}^{n} |f'(t)|dt \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} |f'(t)|dt$$

car f' est supposée intégrable.

Les sommes partielles sont majorées donc $\sum A_n - A_{n-1}$ converge absolument, donc (A_n) aussi.
□

Considérons pour $t \geqslant 1$ la fonction $t \mapsto f(t) = \frac{\exp(-ib\ln t)}{t^a}$ qui est C° sur $[1, +\infty[$.

f est de plus C^1_m et de dérivée :

$$f'(t) = -\frac{z\exp(ib\ln t)}{t^{a+1}}$$

Ainsi f' est intégrable puisque $|f'(t)| \leqslant \dfrac{|z|}{t^{a+1}}$ avec $a+1>1$.

On applique le lemme : la suite $A_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\exp(-ib\ln k)}{k^a}}_{S_n} - \int_1^n f(t)dt$ a une limite finie.

On calcule ensuite l'intégrale suivante :

$$\int_1^n f(t)dt = \left[\frac{\exp(-ib\ln t)}{(1-z)t^{a-1}}\right]_1^n = \frac{\exp(-ib\ln n)}{(1-z)n^{a-1}} - \frac{1}{1-z}$$