Détection de l'anisotropie via la transformée en ondelettes monogéniques

Kévin Polisano

Encadré par

Valérie Perrier
valerie.perrier@imag.fr

Marianne Clausel
marianne.clausel@imag.fr

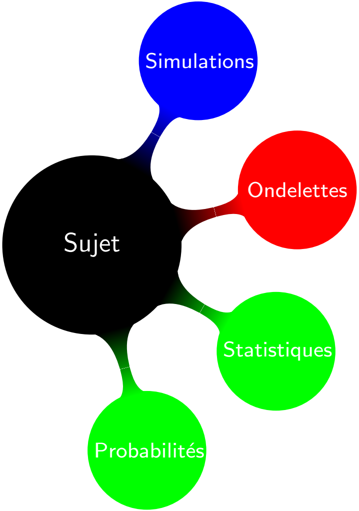
21 juin 2013

Plan de l'exposé

Contexte du stage

- Laboratoire Jean Kuntzmann
- Equipe MGMI - Valérie Perrier
- Equipe SAM - Marianne Clausel

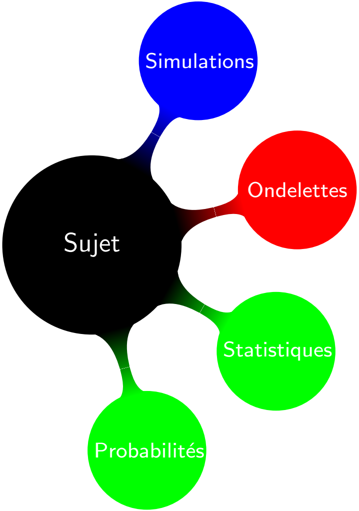
LABORATOIRE
JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE



Contexte du stage

- Laboratoire Jean Kuntzmann
- Equipe MGMI - Valérie Perrier
- Equipe SAM - Marianne Clausel

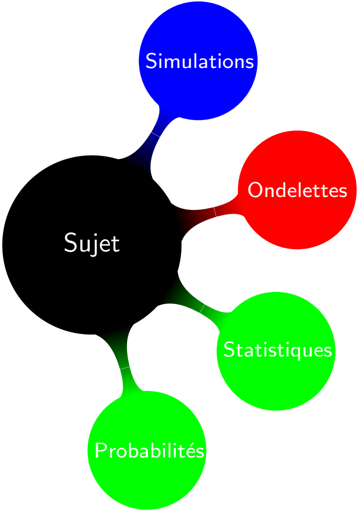
LABORATOIRE
JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE



Contexte du stage

- Laboratoire Jean Kuntzmann
- Equipe MGMI - Valérie Perrier
- Equipe SAM - Marianne Clausel

LABORATOIRE
JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE



Qu'est-ce que l'anisotropie ?

Image anisotrope

Caractéristiques différentes suivant les directions considérées. .

Questions

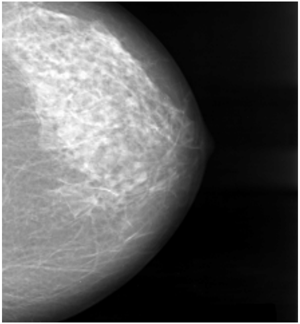
- Paramètres pertinents pour **décrire** l'anisotropie ?
- Outils **d'analyse** efficaces ?

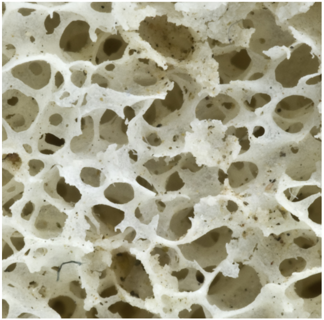
Domaines d'application

Géologie, hydrologie, traitement d'images, imagerie médicale...

Imagerie médicale

- Détection du cancer du sein
- Détection de l'ostéoporose





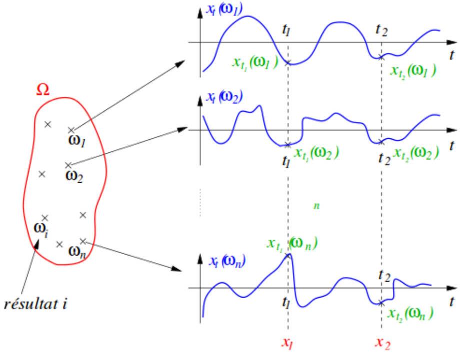
Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Champs aléatoires

Définition. Soit $d \geqslant 1$ et $T \subset \mathbb{R}^d$, on appelle *champ aléatoire* défini sur T à valeur dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ la donnée

- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- une famille (X_t) de v.a de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$



$$d = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{processus stochastique}}$$

Exemple

Trajectoire d'une particule soumis à des perturbations, cours en bourse, etc

Propriétés statistiques

Stationnarité au sens strict. Les lois finies dimensionnelles sont invariantes par translation, c'est-à-dire que

$$(X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_1(t_0+h), \ldots, X_n(t_0+h))$$

Stationnarité au sens large. Les moments d'ordre 2

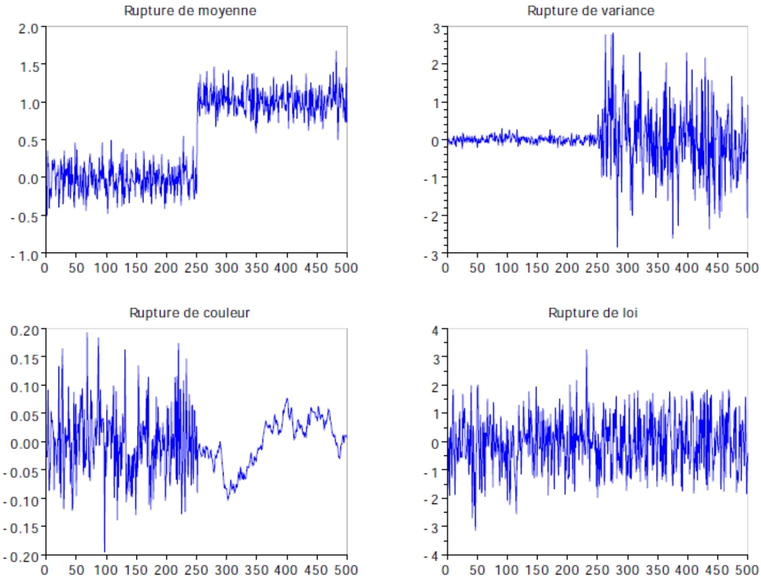
$$\begin{array}{rcl} E(X_t) & = & C \\ Var(X_t) & = & E((X_t - C)^2) = \gamma_0 \end{array}$$

ne dépendent pas de t, et la covariance

$$Cov(X_t X_{t-j}) = E((X_t - C)(X_{t-j} - C)) = \gamma_j$$

seulement du délai entre X_t et X_{t-j}.

Rupture de stationnarité



Propriétés statistiques

Autosimilarité au sens strict. Si (X_t) est un champ aléatoire et $H \in \mathbb{R}$, il est dit autosimilaire d'ordre H en loi si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_\star^+$:

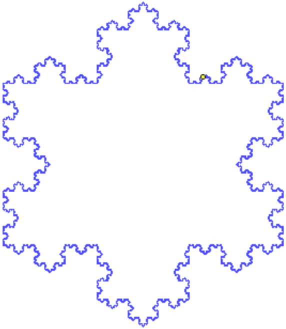
$$\{X(\lambda t), t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^H X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$$

Autosimilarité au second ordre. Un champ aléatoire est dit autosimilaire d'ordre H au second ordre si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_\star^+$, t et s dans $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\left[X(\lambda t)\overline{X(\lambda s)}\right] = \lambda^{2H}\mathbb{E}\left[X(t)\overline{X(s)}\right]$$

$\Rightarrow$ invariance par changement d'échelle

Exemple d'objets autosimilaires



Exemple du mouvement Brownien

Mouvement Brownien. (B_t) est l'unique processus stochastique dépendant du temps t qui vérifie :

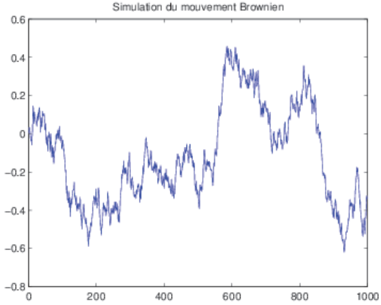
1. (accroissements indépendants) Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ est indépendant du processus $(B_u)_{0 \leq u \leq s}$ avant le temps s.
2. (accroissement stationnaire et gaussien) Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $t - s$.
3. $(B_t)_{t \geq 0}$ est presque sûrement continu, c'est-à-dire pour toute réalisation, la fonction trajectoire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.
4. $B_0 = 0$ p.s. On dit alors que le mouvement brownien est standard.

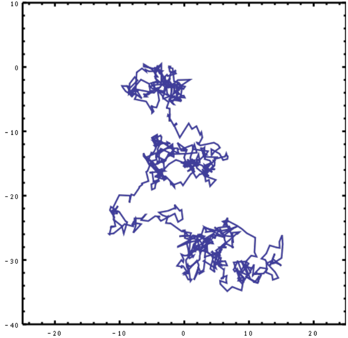
Exemple du mouvement Brownien

Simulation du Brownien 1D : Marche aléatoire

$$B_{n\Delta t} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \Leftrightarrow B_{n\Delta t} = B_{(n-1)\Delta t} + U_n$$

où U_n est une variable normale, et Δt le pas de discrétisation





Distributions aléatoires tempérées gaussiennes (DATG)

Idée : Construire une fonction $X(x,\omega)$ ($x \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega$) telle que pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X(x,\cdot)$ soit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$ et que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$< X(\cdot,\omega), u >= g(\omega) \text{ v.a gaussienne centrée}$$

Hilbert gaussien complexe. $\mathcal{H}(\Omega)$ sous-espace fermé de

$$L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \left\{X : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{E}\left[X^2\right] < +\infty\right\}$$

dont les éléments g sont des v.a gaussiennes isotropes.

Définition DATG : Une application linéaire continue

$$J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H}(\Omega)$$

Moyenne covariance d'une DATG

- **Moyenne** : $m(u) = \mathbb{E}[< X(\cdot, \omega), u >]$
- **Covariance** : forme bilinéaire $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$

$$B(u, v) = \mathbb{E}[< X(\cdot, \omega), u >, < X(\cdot, \omega), v >]$$

Théorème de représentation. $\exists! S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ t.q

$$B(u, v) =< S, u \otimes v >$$

Caractérisation par la moyenne et la covariance. Réciproquement si on se donne une forme bilinéaire continue $B(u, v)$ et une forme linéaire continue $m(u)$ sur l'espace des fonctions tests, t.q $B(u, v) - m(u)m(v)$ soit définie positive, alors $\exists$ une DATG de covariance $B(u, v)$ et de moyenne $m(u)$.

Exemple de DATG : le bruit blanc

Bruit blanc : une DATG de moyenne nulle et de covariance $\Gamma = \delta_0$. Un bruit blanc réel $Z(x, \omega)$ vérifie $\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$B(u, v) = \mathbb{E}[< Z(\cdot, \omega), u >< Z(\cdot, \omega), v >] = \int u(x)v(x)dx$$

Important : L'opérateur $W : u \mapsto < Z(\cdot, \omega), u >$ établit une isométrie entre $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{H}_0(\Omega)$ Hilbert gaussien réel.

$$Z(x, \omega) = \sum g_j(\omega) f_j$$

est une représentation où les (g_j) forment une b.o.n de $\mathcal{H}_0$, donc des v.a i.i.d de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et (f_j) une b.o.n de $L^2(\mathbb{R}^d)$

Lien avec le mouvement Brownien

Propriété. Dans une base orthonormée (f_j) de L^2,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[0,t]} &= \sum < \mathbb{1}_{[0,t]}, f_j >_{L^2} f_j \\ &= \sum \left(\int_0^t f_j(x)dx \right) f_j \end{aligned}$$

En prenant l'image par W et compte tenu de $W(f_j) = g_j(\omega)$

$$X(t,\omega) = \sum \left(\int_0^t f_j(x) \right) g_j(\omega)$$

A comparer avec l'expression du bruit blanc réel

$$Z(x,\omega) = \sum g_j(\omega) f_j$$

qui peut donc être vu comme la « **dérivée d'un Brownien** »

Intégrale stochastique

$\boxed{\Rightarrow}$ Résoudre des équations différentielles stochastiques (EDS)

- Une équation différentielle déterministe :

$$dx(t) = f(t, x(t))dt$$

- Pour une EDS on ajoute une perturbation aléatoire :

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \boxed{\sigma(t, X(t))dB_t}$$

- Résoudre l'EDS implique de définir l'intégrale stochastique

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \boxed{\int_0^t \sigma(x, X(s))dB_s}$$

Intégrale stochastique

$\boxed{\Rightarrow}$ Résoudre des équations différentielles stochastiques (EDS)

- Une équation différentielle déterministe :

$$dx(t) = f(t, x(t))dt$$

- Pour une EDS on ajoute une perturbation aléatoire :

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \boxed{\sigma(t, X(t))dB_t}$$

- Résoudre l'EDS implique de définir l'intégrale stochastique

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \boxed{\int_0^t \sigma(x, X(s))dB_s}$$

Intégrale stochastique

$\boxed{\Rightarrow}$ Résoudre des équations différentielles stochastiques (EDS)

- Une équation différentielle déterministe :

$$dx(t) = f(t, x(t))dt$$

- Pour une EDS on ajoute une perturbation aléatoire :

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \boxed{\sigma(t, X(t))dB_t}$$

- Résoudre l'EDS implique de définir l'intégrale stochastique

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \boxed{\int_0^t \sigma(x, X(s))dB_s}$$

Intégrale stochastique

Définition d'une mesure aléatoire. Soit X un ensemble et une algèbre $\mathcal{M}$ de parties de X, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et V l'ensemble de ses variables aléatoires. Une mesure aléatoire sur $(X, \mathcal{M})$ est une application $Z : \mathcal{M} \to V$

- si $A \in \mathcal{M}$ est une réunion d'une famille dénombrable $A_n \in \mathcal{M}$ disjoints (on note $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$) alors :

$$Z(A) \overset{\mathbb{L}^2}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} Z(A_n)$$

- Il existe une unique mesure σ, intensité associée à Z, tq :

$$\mathbb{E}\left[Z(A)\overline{Z(B)}\right] = \sigma(A \cap B)$$

- Images de moyenne nulle $\forall A \in \mathcal{M}, \mathbb{E}[Z(A)] = 0$

Intégrale stochastique

A partir de l'isométrie $W : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to \mathcal{H}$, $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $V = \mathcal{H}$ on définit $B : \mathcal{M} \to V$ / $B(A) \overset{def}{=} W(\mathbb{1}_A)$

Propriété. B est une mesure aléatoire

$\boxed{\Rightarrow}$ $B(A)$ est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, \mu(A))$

Exemple avec la mesure de Lebesgue

Avec $\mu = dx$ et l'espace est $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx)$ on a donc en particulier pour les intervalles $A_1 = [0, t]$ et $A_2 = [0, s]$

$$\mathbb{E}[(B(A_1) - B(A_2))^2] = \mathbb{E}[W(\mathbb{1}_{A_1} - \mathbb{1}_{A_2})^2] = |t - s|$$

On appelle aussi cette mesure gaussienne *mesure Brownienne*.

Intégrale stochastique

Construction de l'intégrale stochastique. Si f est élémentaire $f = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ où les A_i sont disjoints, on définit l'intégrale stochastique de f par rapport à la mesure dB par :

$$\int_{\Omega} f dB \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} B(A_i) = W(f)$$

Or $f \mapsto \int_{\Omega} f dB = W(f)$ définit une isométrie de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $\mathcal{H}$ donc on conclut par densité pour tout $u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

On dit que l'on intègre f par rapport à un Brownien. Si on considère à la place la TF d'un bruit blanc gaussien $\hat{W}$, qui est une mesure aléatoire complexe, on peut intégrer :

$$\int_{\Omega} f d\hat{W}$$

Intégrale stochastique multiple

Intégrale stochastique multiple.
$\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{F}, \mu(A) < +\infty\}$ et $f \in \mathcal{S}_n$ une fonction élémentaire symétrique à n variables définie comme suit :

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,i_n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}}$$

où $c_{i_1,\ldots,i_n}$ est égal à 0 si deux indices de $i_1, \ldots, i_n$ sont égaux, et les A_i des ensembles disjoints de $\mathcal{B}_0$. Alors on définit l'intégrale stochastique multiple pour ces fonctions élémentaires comme étant la quantité :

$$I_n(f) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,i_n} B(A_{i_1}) \cdots B(A_{i_n})$$

Intégrale stochastique multiple

(i) $I_n(f)$ est linéaire

(ii) $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$ où $\tilde{f}$ est la symétrisation de f i.e :

$$\tilde{f}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1}, \ldots, t_{\sigma(n)})$$

(iii) $\mathbb{E}\left[I_n(f) I_p(g)\right] = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ n! < \tilde{f}, \tilde{g} >_{L^2(\Omega^n)} \text{ si } n = p \end{cases}$

$$\mathbb{E}\left[I_n(f)^2\right] = n! \|\tilde{f}\|^2_{L^2(\Omega^n)} \leqslant n! \|f\|^2_{L^2(\Omega^n)}$$

L'opérateur $f \mapsto I_n(f)$ s'étend en un opérateur linéaire et continu de $L^2(\Omega^n)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfaisant (i), (ii) et (iii)

$$\int_{\Omega^n} f(t_1, \ldots, t_n) B(dt_1) \cdots B(dt_n) = I_n(f)$$

Plan de l'exposé

Mouvement Brownien fractionnaire (mBf)

Définition du mBf. Le mBf est l'unique processus stochastique gaussien non stationnaire, de moyenne nulle, satisfaisant $B_H(0) = 0$ et dont les accroissements $B_H(x) - B_H(y)$ stationnaires vérifient la propriété

$$\mathbb{E}\left[(B_H(x) - B_H(y))^2\right] = 2\alpha|x - y|^H$$

où $H \in (0, 1)$ est l'exposant de Hurst ; il est autosimilaire :

$$\boxed{\{B_H(\epsilon x), x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left\{\epsilon^H B_H(x), x \in \mathbb{R}\right\}, \quad \forall \epsilon > 0}$$

Mouvement Brownien fractionnaire

L'autosimilarité génère de l'irrégularité, que l'on quantifie grâce à la notion de régularité Höldérienne

- f est H-**Höldérienne** si :

$$\forall x, y \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^H$$

- Localement l'exposant de Hölder ponctuel $H(f,x)$ est :

$$\begin{aligned} H(f,x) &= \sup_{H'} \left\{ \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon^{H'}} = 0 \right\} \\ &= \sup_{H'} \left\{ |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^{H'}, \forall y \right\} \end{aligned}$$

En tout point $x \in [0,1]$ l'exposant de Hölder ponctuel du mBf ne dépend pas du hasard et est p.s égal à $H(B_H, x) = H$

Représentation harmonisable du mBf

La propriété d'auto-similarité se traduit sur la densité spectrale par une propriété d'homogénéité, et la relation sur l'écart type fixe le degré d'homogénéité, on en déduit que

$$f(\lambda) = \frac{C_H}{|\lambda|^{H+1/2}}$$

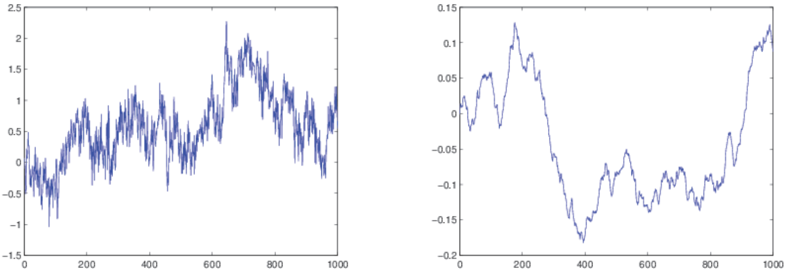
et une représentation harmonisable de type Fourier du mBf

$$B_H(x) = \int_{\mathbb{R}} C_H \frac{e^{ix\lambda} - 1}{\|\lambda\|^{H+1/2}} d\widehat{W}(x)$$

Pour un milieu **isotrope** $d-$dimensionnel, le champ Brownien fractionnaire se définit de manière similaire :

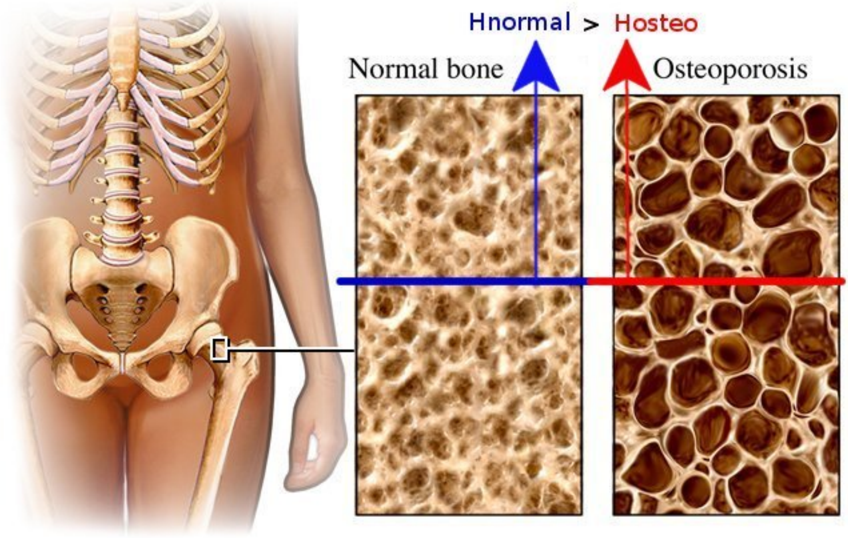
$$B_H(x) = \int_{\mathbb{R}^d} C_H \frac{e^{ix\cdot\xi} - 1}{\|\xi\|^{H+d/2}} \widehat{W}(d\xi)$$

Visualisation du mBf



Simulation du mBf pour H=0.2 (à gauche) et H=0.8 (à droite)

Le mBf : aide au diagnostic ostéoporotique



Le champ Brownien fractionnaire anisotrope

Modèle d'Estrade et Bonami (2003) [?]. On modélise le milieu osseux par un champ aléatoire gaussien à accroissements stationnaires

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{it\cdot\xi} - 1}{\|\xi\|^{h(\theta)+1}} d\widehat{W}(\xi), \quad t \in \mathbb{R}^2$$

Coupe d'orientation θ est un processus 1D

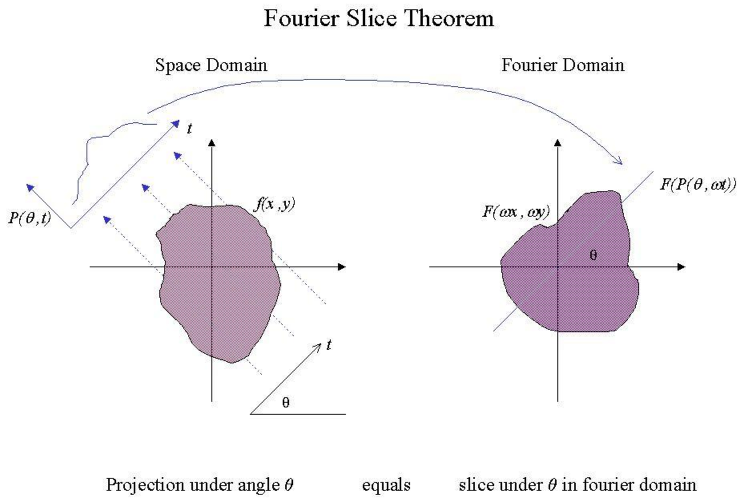
$$Y_\theta(t) = X(t(\cos\theta, \sin\theta)), \quad t \in \mathbb{R}$$

dont la régularité est la même sur toutes les orientations :

$$H = \inf_\theta h(\theta)$$

Problème : Comment alors estimer $h(\theta)$?

Le champ Brownien fractionnaire anisotrope



Théorème. m et M deux réels, $X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it\cdot\xi} - 1) f^{1/2}(\xi) d\xi$

(i) $f^{1/2}$ satisfait la proposition $D(m)$:

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall |\xi| > A, f^{1/2}(\xi) \leqslant B|\xi|^{-(2m+d)}$$

(ii) Pour toute direction $u \in S^{d-1}$ $\exists \beta(u) \in (0, M]$ tel que

- $\forall \alpha < \beta(u), \exists A > 0$ tel que :

$$\forall |\xi| > A \text{ et } \frac{\xi}{|\xi|} \in \mathcal{V}(S^{d-1}), f^{1/2}(\xi) \leqslant |\xi|^{-(2\alpha+d)}$$

- $\forall \alpha > \beta(u), \exists A > 0$ tel que :

$$\forall |\xi| > A \text{ et } \frac{\xi}{|\xi|} \in \mathcal{V}(S^{d-1}), f^{1/2}(\xi) > |\xi|^{-(2\alpha+d)}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^{d-1} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$ telle que $|\hat{\varphi}|^2$ satisfasse $D(M)$. Alors $\forall u \in S^{d-1}$ le processus p a pour régularité $\beta(u) + \frac{1}{2}(d-1)$.

$$p(X \circ R_u, \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (X \circ R_u)(s,t) \varphi(s) ds$$

Plan de l'exposé

Simulation du CBFA par bandes tournantes

Décomposition du CBFA proposée par Bonami, Moisan et Richard (2012) [?]. Le **variogramme** du champ aléatoire X :

$$\forall y \in \mathbb{R}^2, v_X(y) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X(y) - X(0))^2\right] = \int_{\mathbb{R}^2} |e^{-ix\cdot\xi} - 1|^2 f(\xi) d\xi$$

Il caractérise un champ à accroissements stationnaires puisque

$$\forall y, z \in \mathbb{R}^2, Cov(X(y), X(z)) = v_X(y) + v_X(z) - v_X(y - z)$$

Par la suite on s'intéresse à la densité non radiale

$$f^{1/2}(\xi) = c(arg\ \xi)\|\xi\|^{-2h(arg\ \xi)-2}$$

où c est la fonction de topothésie et h la fonction de Hurst directionnelle, qui vont introduire l'anisotropie.

Simulation du CBFA par bandes tournantes

- **Changement de variable polaire** :

$$v_X(x) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma(h(\theta))c(\theta)|x \cdot u(\theta)|^{2h(\theta)} d\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

avec $\gamma(H) = \frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(H\pi)}$ et $u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

- Soit encore en posant $\tilde{v}_\theta(t) = \gamma(h(\theta))c(\theta)|t|^{2h(\theta)}$

$$v_X(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tilde{v}_\theta(x \cdot u(\theta)) d\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Le variogramme 2D $v_X(x)$ s'obtient en faisant « tourner » et en sommant des variogrammes 1D $\tilde{v}_\theta(t)$.

- Le variogramme d'un mBf 1D d'ordre H s'écrit $\forall t \in \mathbb{R}, w_H(t) = \frac{1}{2}|t|^{2H}$. A un facteur multiplicatif près les $\tilde{v}_\theta$ sont des variogrammes de mBf 1D d'ordre $h(\theta)$.

Simulation du CBFA par bandes tournantes

Il est alors naturel de considérer le champ simulé suivant :

$$\boxed{X_{\Theta,\Lambda}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i \gamma(h(\theta_i))c(\theta_i)}\, Y_i(x \cdot u(\theta_i))}$$

où les Y_i sont n mBf indépendants d'ordre $h(\theta_i)$.

$$\boxed{v_{\Theta,\Lambda}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma(h(\theta_i))c(\theta_i) w_{h(\theta_i)}(x \cdot u(\theta_i))}$$

Problèmes :

- Comment choisir $\Theta = (\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\Lambda = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ pour assurer la convergence de $X_{\Theta,\Lambda}(x) \to X(x)$.
- L'algorithme de simulation des mBf 1D Y_i s'effectue sur des points équidistants. Ce qui n'est pas le cas ici.

Simulation du CBFA par bandes tournantes

Convergence

La preuve utilise la notion de **distance de Kolmogorov** :

$$d_{Kol}(X_{\Theta,\Lambda}(x), X(x)) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \{\mathbb{P}(X_{\Theta,\Lambda}(x) \leqslant t) - \mathbb{P}(X(x) \leqslant t)\}$$

et lorsque $d_{Kol}(X_{\Theta,\Lambda}(x), X(x)) \to 0$ alors $X_{\Theta,\Lambda}(x) \to X(x)$ au sens des distributions. Pour cela on montre d'une part que

$$d_{Kol}(X_{\Theta,\Lambda}(x), X(x)) \leqslant \frac{|v_X(x) - v_{\Theta,\Lambda}(x)|}{v_X(x)}$$

et d'autre part qu'on peut toujours trouver Θ, Λ et un compact $T \subset \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in T, |v_X(x) - v_{\Theta,\Lambda}(x)| \leqslant C_T \epsilon_\Theta^{\min(2H,1)}$$

où $H = \min_\theta h(\theta)$ et $\epsilon_\theta = \max_{i=1\ldots n+1}(\theta_i - \theta_{i-1})$.

Simulation du CBFA par bandes tournantes

Equirépartition par autosimilarité

- Simulons $X_{\Theta,\Lambda}$ sur $[0,1]^2$ discrétisée sur une grille régulière $r \times r$. Les points en lesquels on veut estimer X sont ainsi

$$x = \left(\frac{k_1}{r}, \frac{k_2}{r}\right), \quad 0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant r$$

- Choisissons les θ_i de sorte que $\tan(\theta_i) = \dfrac{p_i}{q_i}$ où $p_i \in \mathbb{Z}$ et $q_i \in \mathbb{N}$. Alors, compte tenu de l'autosimilarité du mBf Y_i

$$\begin{aligned} Y_i(x \cdot u(\theta_i)) &= Y_i\left(\tfrac{k_1}{r}\cos(\theta_i) + \tfrac{k_2}{r}\sin(\theta_i)\right) \\ &= \left(\frac{\cos(\theta_i)}{rq_i}\right)^{h(\theta_i)} Y_i(k_1 q_i + k_2 p_i) \end{aligned}$$

où les $k_1 q_i + k_2 p_i$ sont entiers. Donc on peut se ramener à une simulation équidistante des $Y_i(k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant r(|p_i| + q_i)$.

Simulation du CBFA par bandes tournantes

Version naïve

Etapes :

1. On considère un échantillonnage régulier des bandes
$$\theta_i = \alpha_1 + \frac{i}{n}(\alpha_2 - \alpha_1)$$
dans le quadrant défini par les angles α_1 et α_2
2. Approximation des $\tan(\theta_i)$ par fractions continues
$$\tan(\theta_i) \simeq \frac{p_i}{q_i}$$
3. Simulation des Y_i de longueur $r(|p_i| + q_i)$ par [?]

$\boxed{\Rightarrow}$ Dépassement de mémoire ! Nécessité de contrôler la taille des entiers p_i et q_i de façon à réduire la complexité.

Simulation du CBFA par bandes tournantes

Version améliorée : par programmation dynamique

En entrée : r, α_1, α_2 et ϵ.

L'idée va être de choisir parmi cet ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_N &= \{(p,q)/-N \leqslant p \leqslant N, 1 \leqslant q \leqslant N, \\ &\quad PGCD(p,q) = 1, \alpha_1 < \arctan\left(\tfrac{p}{q}\right) < \alpha_2\,\}\end{aligned}$$

En sortie : s couples qui minimisent le coût total :

$$C(\Theta) = \sum_{k=1}^{s} C(r(|p_{i_k}| + q_{i_k}))$$

où $C(n)$ est le coût de l'algorithme de simulation d'un mBf 1D, qui est en $O(n \log n)$, sous la contrainte d'erreur $\epsilon_\Theta \leqslant \epsilon$.

Remarque : en pratique on prend $N = 1 + \left\lceil \frac{1}{\tan(\epsilon)} \right\rceil$

Simulation du CBFA par bandes tournantes

Version améliorée : par programmation dynamique

- On trie les couples $(p_k, q_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathcal{V}_N$ suivant les $\theta_k = \arctan\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$ croissants. On ajoute $\theta_0 = \alpha_1$ et $\theta_{n+1} = \alpha_2$.
- Fixons $0 \leqslant i \leqslant n+1$ et considérons s indices supérieurs à i :

$$i_1 = i, i_2, \ldots, i_s = n+1$$

Le coût minimal de ce sous-ensemble est noté c_i, et le coût de simulation de la bande d'indice i est noté $e_i = C(r(|p_i| + q_i))$

$$\boxed{c_i = e_i + \min_{j > i, \theta_j \leqslant \theta_i + \epsilon} c_j}$$

- Le coût qui nous intéresse est c_0. Pour cela on part de la fin en posant $c_{n+1} = 0$, et on calcule les c_i à rebours, en notant à chaque fois k_i l'indice $j > i$ qui réalise le minimum.

Séquence optimale : $i_1 = k_0, i_2 = k_{i_1}, \ldots, i_s = k_{i_{s-1}}$

Résultats de la simulation du CFBA

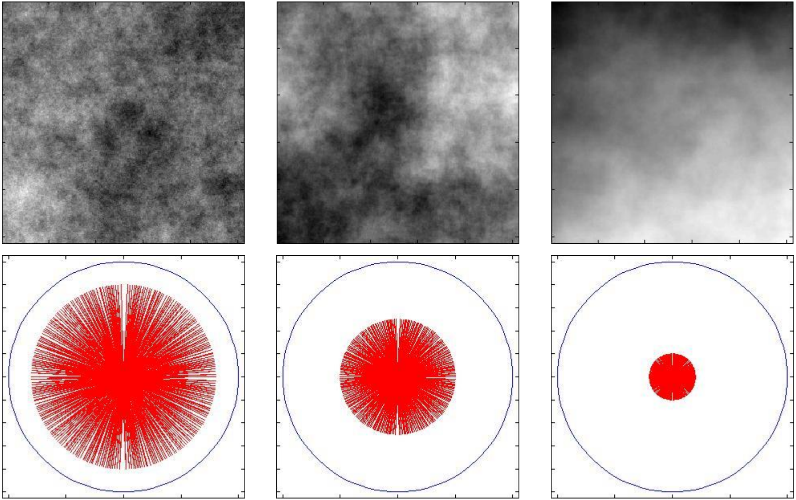
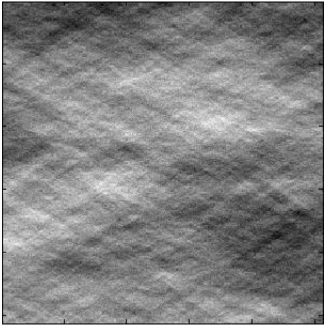


Figure: Type 1. mBf pour $g(\theta) = H$, $H = 0.2$, $H = 0.5$ et $H = 0.8$

Résultats de la simulation du CFBA

$$g(\theta) = \begin{cases} \mu_1 \text{ si } \theta \in (\mathrm{dir}_1, \mathrm{dir}_2) \\ \mu_2 \text{ sinon} \end{cases}$$



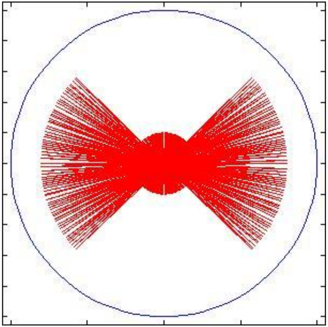
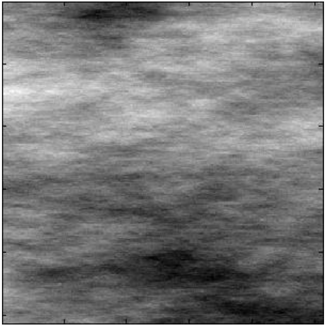


Figure: Type 2. $(\mathrm{dir}_1, \mathrm{dir}_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$

Résultats de la simulation du CFBA

$$g(\theta) = \begin{cases} \text{linéaire sur } [-\frac{\pi}{2}, \mathrm{dir}_1] \to [\mu_2, \mu_1] \\ \text{linéaire sur } [\mathrm{dir}_1, \frac{\pi}{2}] \to [\mu_1, \mu_2] \end{cases}$$



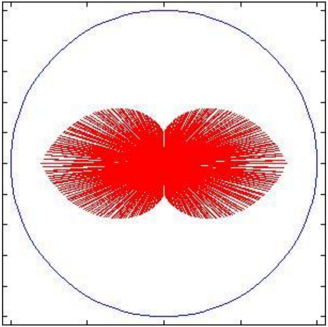


Figure: Type 3. $\mathrm{dir}_1 = 0$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$

Résultats de la simulation du CFBA

$$g(\theta) = \begin{cases} r(\theta)\mu_1 + (1 - r(\theta))\mu_2 \text{ pour } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ g(-\theta) \text{ pour } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ \text{ avec } r(\theta) = \frac{1}{2}[1 + \sin(2\theta + \frac{\pi}{2})] \end{cases}$$

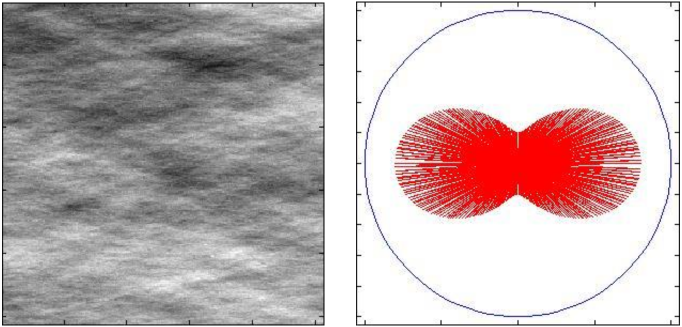
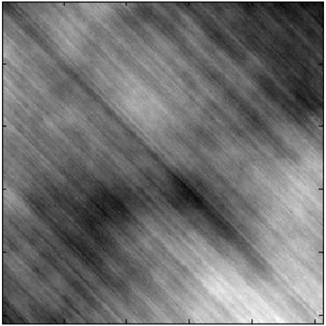


Figure: Type 4. $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$

Résultats de la simulation du CFBA

$$g(\theta) = \begin{cases} \mu_1 \text{ si } \theta \in (\mathrm{dir}_1 - \epsilon, \mathrm{dir}_1 + \epsilon) \\ \mu_2 \text{ sinon} \end{cases}$$



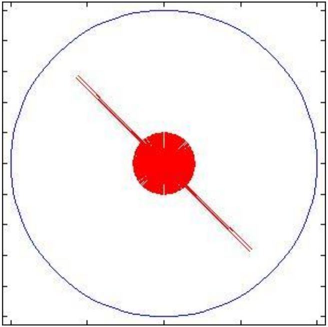


Figure: Type 5. $\mathrm{dir}_1 = -\frac{\pi}{4}$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$

Résultats de la simulation du CFBA

$$g(\theta) = \begin{cases} \mu_1 \text{ si } \theta \in (\text{dir}_1 - \epsilon, \text{dir}_1 + \epsilon) \\ \mu_2 \text{ si } \theta \in (\text{dir}_2 - \epsilon, \text{dir}_2 + \epsilon) \\ H \text{ sinon} \end{cases}$$

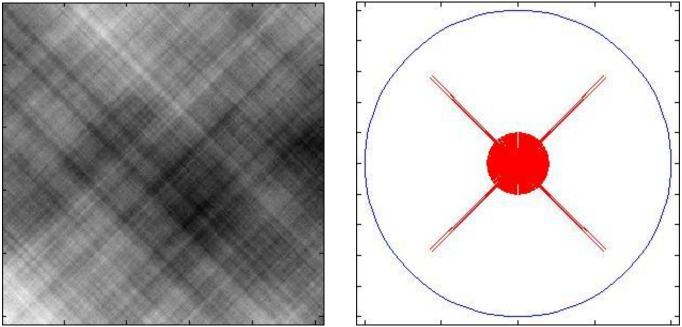
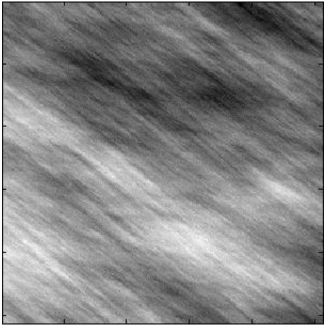


Figure: Type 6. $(\text{dir}_1, \text{dir}_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.2)$ et $H = 0.8$

Résultats de la simulation du CFBA

$$g(\theta) = \text{linéaire sur } [\text{dir}_1, \text{dir}_2] \rightarrow [\mu_1, \mu_2]$$



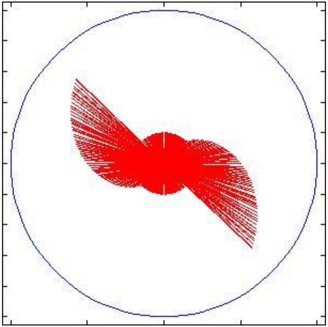


Figure: Type 7. $(\text{dir}_1, \text{dir}_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$

Plan de l'exposé

Signal analytique en 1D

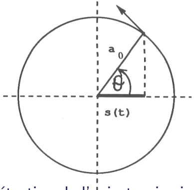
Notion d'amplitude, de phase et fréquence instantanée

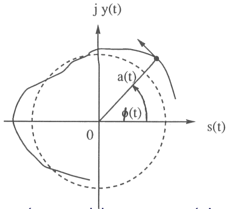
Expression d'un signal réel simple

- $s(t) = a(t)cos(\phi(t))$ avec $\phi(t) = \omega t + \theta_0$
- Ex : transmission de la voix, courants et tension, etc.

Fréquence instantanée

- $\underline{s}(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$, $s(t) = \Re[\underline{s}(t)]$
- Fréquence instantanée $\frac{d\phi}{dt}$





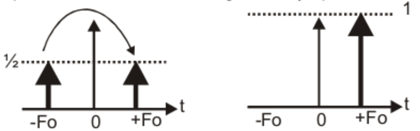
Signal analytique en 1D

Généralisation de la méthode

Signal analytique associé au signal réel

- $\cos(2\pi f_0 t) \longrightarrow e^{i2\pi f_0 t}$
- $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{-i2\pi f_0 t} + e^{i2\pi f_0 t})$
- $s(t) \longrightarrow ???$

Spectres du cosinus et du signal analytique associé :



Spectre du cosinus

Spectre de exp(2πfot)

Signal analytique associé au signal réel

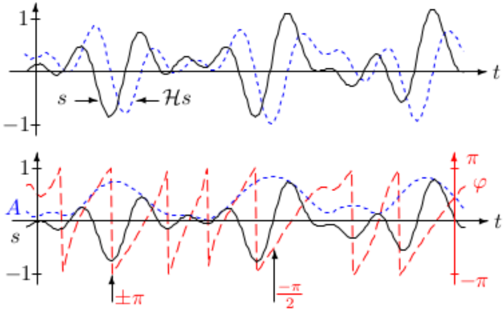
- $$\hat{s}(t) \longrightarrow \begin{array}{rcl} \hat{s}_A(\omega) & = & \left\{ \begin{array}{c} 2\hat{s}(\omega) \text{ si } \omega \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } \omega < 0 \end{array} \right. \\ & = & \hat{s}(\omega) + sgn(\omega)\hat{s}(\omega) \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} TF^{-1}(sgn(\omega))(t) & = & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} sgn(\omega) d\omega \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} -e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \\ & = & \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{it}e^{i\omega t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{it}e^{i\omega t}\right]_{0}^{+\infty} \\ & = & -\frac{1}{i\pi t} = i\frac{1}{\pi t} \end{array}$$
- $s(t) \longrightarrow s_A(t) = s(t) + i\left(s(t) * \frac{1}{\pi t}\right) = s(t) + iTH[s](t)$
- Transformée de Hilbert : $TH[s](t) = \frac{1}{\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau$

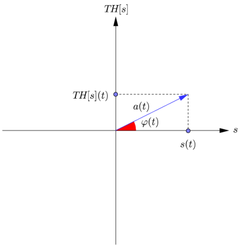
Signal analytique en 1D

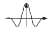
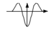
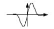
Généralisation de la méthode

Signal analytique associé au signal réel

$$s_A(t) = s(t) + i\,TH[s](t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$$





Phase φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$-\frac{\pi}{2}$
Forme locale				

Signal analytique en 2D

Transformée de Riesz

Le signal monogénique a été introduit par Felsberg (2001) [?]

Signal analytique associé à un signal 2D

- En 1D : $s_A(t) = s(t) + i\,TH[s](t)$
- En 2D : $s_M(x) = s(x) + i\,TR_1(x) + j\,TR_2(x)$

Transformée Riesz vs. Hilbert

- $TH[s](t) = \frac{1}{\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau \xleftrightarrow{TF} -i \frac{\omega}{|\omega|} \hat{s}(\omega)$
- $TR_1[s](x) = \frac{1}{2\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau_1 s(t-\tau)}{\|\tau\|^3} d\tau \xleftrightarrow{TF} -i \frac{\omega_1}{|\omega|} \hat{s}(\omega)$
- $TR_2[s](x) = \frac{1}{2\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau_2 s(t-\tau)}{\|\tau\|^3} d\tau \xleftrightarrow{TF} -i \frac{\omega_2}{|\omega|} \hat{s}(\omega)$

Propriété de l'opérateur de Riesz

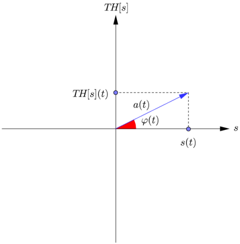
- $TR[s](x) = TR_1[s](x) + iTR_2[s](x) \overset{TF}{\longleftrightarrow} -i\frac{\omega_1+i\omega_2}{\|\omega\|}\hat{s}(\omega)$
- $TR[s(a\cdot+b)](x) = TR[s(\cdot)](ax+b)$ (invariance par translation et changement d'échelle)
- $TR[s(R_\theta\cdot)](x) = e^{i\theta}TR[s(\cdot)](R_\theta x)$ (invariance par rotation à un facteur près)
- $s(x) = A\cos(\xi^T x)$ avec $\xi^T = \xi[\cos(\alpha)\sin(\alpha)]$, $TR[s](x) = A|\sin(\xi^T x)|$, $arg\{TR[s]\} = \alpha$
- $TR[s] = \nabla_{\mathbb{C}}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}s$ avec $\Delta^\alpha \overset{TF}{\longleftrightarrow} \|\omega\|^{2\alpha}$

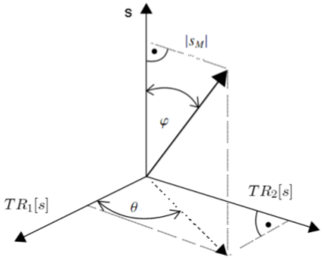
Signal analytique en 2D

Signal monogénique

Définition de l'orientation θ et la phase φ

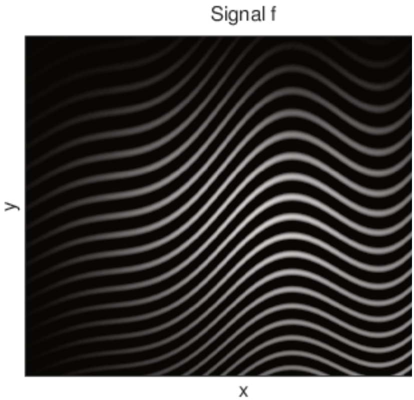
- $s_A(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ TH[s](t) \end{bmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} = a(t)\begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix}$
- $s_M = \begin{bmatrix} s \\ TR_1[s] \\ TR_2[s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \end{bmatrix}$

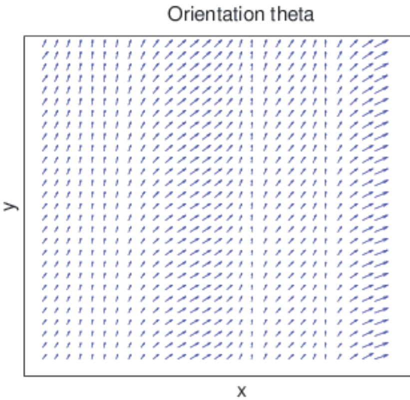




Exemples

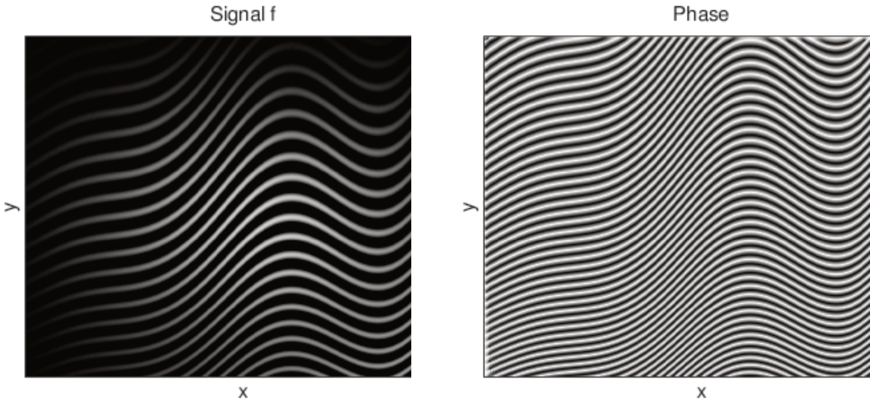
Signal monogénique





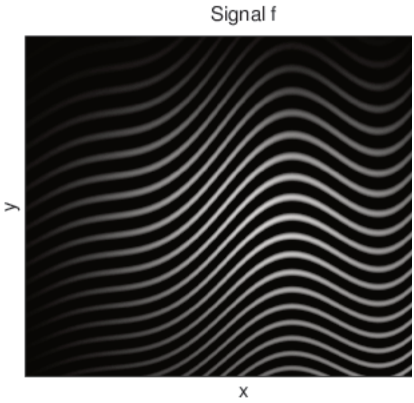
Exemples

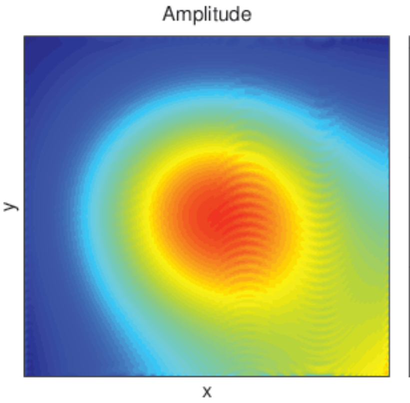
Signal monogénique



Exemples

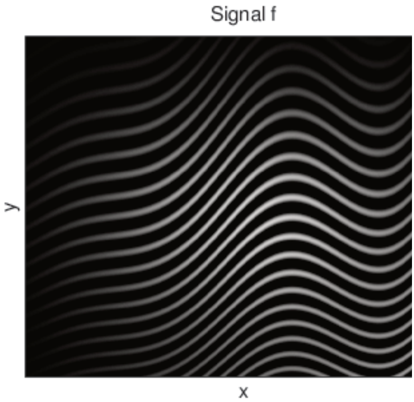
Signal monogénique

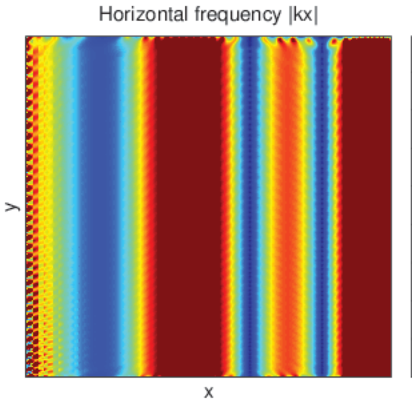




Exemples

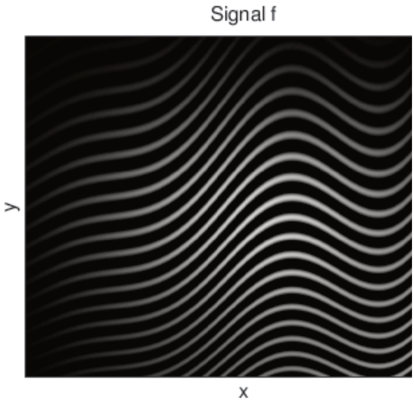
Signal monogénique

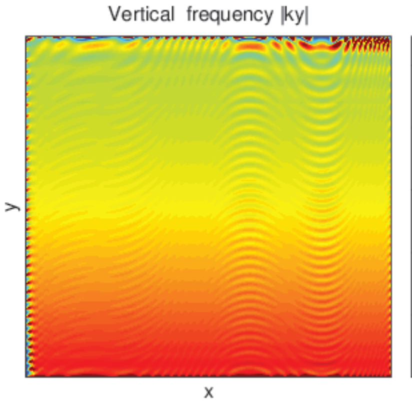




Exemples

Signal monogénique





Décomposition classique en ondelettes

- $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une ondelette admissible
  $C_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{|\xi|^2} d\xi < +\infty$
- Famille d'ondelettes $\psi_{a,\alpha,b} = T_b R_\alpha D_a \psi$
- $c_f(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi_{a,\alpha,b}(x)} dx$

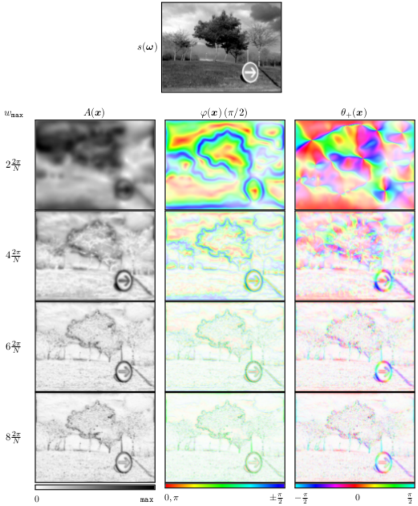
Construction d'une ondelette monogénique

- $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une ondelette admissible,
  $\psi^{(M)} = (\psi, TR_1[\psi], TR_2[\psi])$, reste admissible
- Coefficients en ondelettes monogéniques de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$
  sont les vecteurs : $c_f^{(M)}(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi^{(M)}_{a,\alpha,b}}(x) dx$

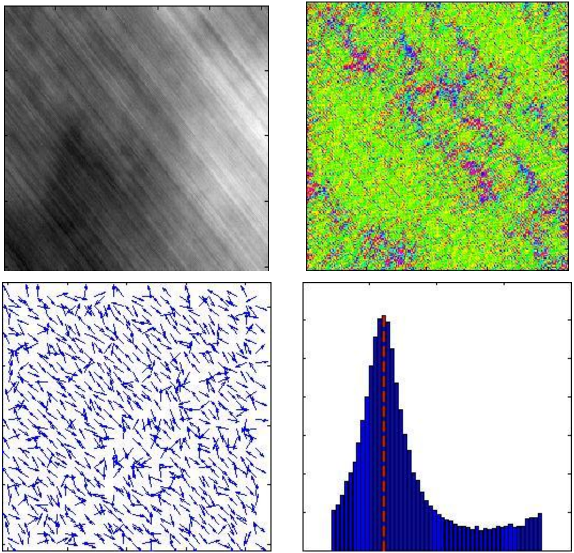
Transformée en ondelettes monogéniques (MWT)

Exemple

Transformée en ondelettes monogéniques continue discrétisée, étudiée par Olhede & Metikas (2009) [?]



Visualisation des orientations de texture



Visualisation circulaire des histogrammes

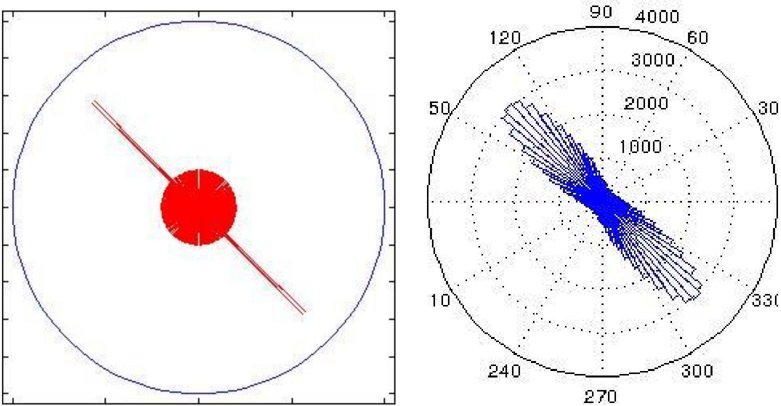
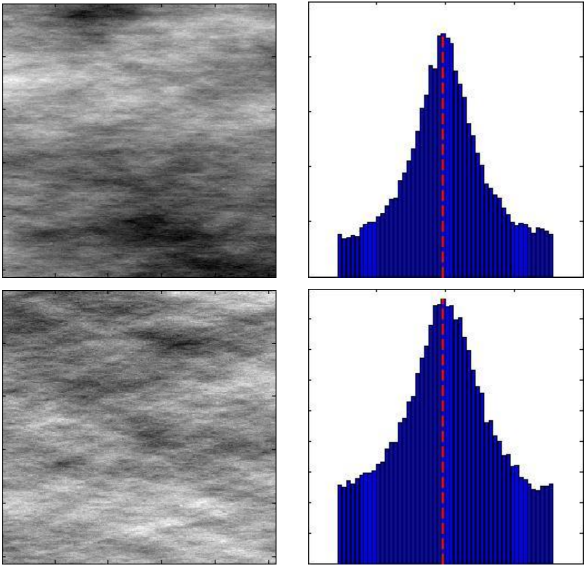


Figure: Visualisation circulaire des histogrammes théorique (à gauche) et empiriques (à droite)

Visualisation des orientations



Visualisation des orientations

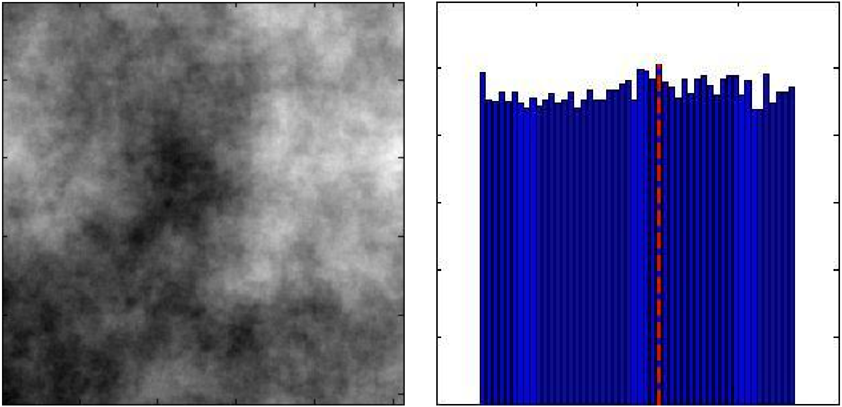
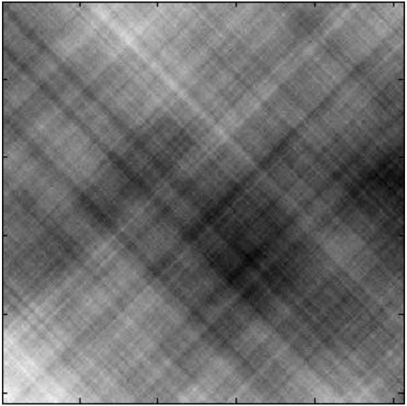


Figure: Texture isotrope et histogramme des orientations plat

Visualisation des orientations



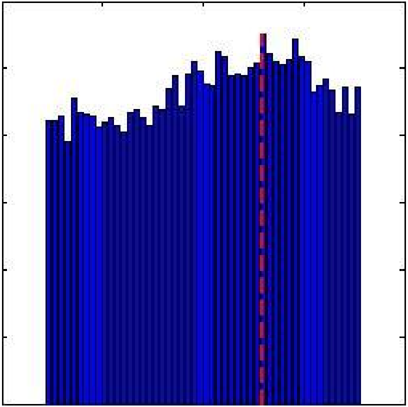


Figure: Texture orientée dans 2 directions et histogramme plat !

Détection de l'anisotropie

- **Limitation** pour les orientations multiples
  $\boxed{?}$ Pourquoi n'observe-t-on pas plusieurs modes ?
  $\boxed{\Rightarrow}$ Ondelette de Morlet isotrope
  $\boxed{\Rightarrow}$ Ondelettes anisotropes ?
- **Détection** du mode pour les orientations simples
  $\boxed{?}$ Le maximum est-il un bon indicateur ?
  $\boxed{\Rightarrow}$ Non. Il ne renseigne pas nécessairement d'une orientation dominante (cf. histogramme plat). Ne permet donc pas de discriminer isotrope v.s anisotrope.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Loi de probabilité dont la densité approximerait les histogrammes empiriques des orientations ?

« Fitter » une gaussienne sur l'histogramme ?

- Gaussienne caractérisée par sa moyenne et sa variance
- On traite des données angulaires
- Moyenne de l'échantillon $\alpha = (0°, 30°, 350°)$?
- Moyenne arithmétique $= 130° \neq$ orientation $\simeq 0°$
- La moyenne arithmétique n'a pas de sens ici !
- Prendre en compte le caractère circulaire des données. Analogue circulaire de la loi normale ?

« Fitter » une gaussienne sur l'histogramme ?

- Gaussienne caractérisée par sa moyenne et sa variance
- On traite des données angulaires
- Moyenne de l'échantillon $\alpha = (0°, 30°, 350°)$?
- Moyenne arithmétique $= 130° \neq$ orientation $\simeq 0°$
- La moyenne arithmétique n'a pas de sens ici !
- Prendre en compte le caractère circulaire des données. Analogue circulaire de la loi normale ?

« Fitter » une gaussienne sur l'histogramme ?

- Gaussienne caractérisée par sa moyenne et sa variance
- On traite des données angulaires
- Moyenne de l'échantillon $\alpha = (0°, 30°, 350°)$?
- Moyenne arithmétique $= 130° \neq$ orientation $\simeq 0°$
- La moyenne arithmétique n'a pas de sens ici !
- Prendre en compte le caractère circulaire des données. Analogue circulaire de la loi normale ?

« Fitter » une gaussienne sur l'histogramme ?

- Gaussienne caractérisée par sa moyenne et sa variance
- On traite des données angulaires
- Moyenne de l'échantillon $\alpha = (0^\circ, 30^\circ, 350^\circ)$?
- Moyenne arithmétique $= 130^\circ \neq$ orientation $\simeq 0^\circ$
- La moyenne arithmétique n'a pas de sens ici !
- Prendre en compte le caractère circulaire des données. Analogue circulaire de la loi normale ?

« Fitter » une gaussienne sur l'histogramme ?

- Gaussienne caractérisée par sa moyenne et sa variance
- On traite des données angulaires
- Moyenne de l'échantillon $\alpha = (0^\circ, 30^\circ, 350^\circ)$?
- Moyenne arithmétique $= 130^\circ \neq$ orientation $\simeq 0^\circ$
- La moyenne arithmétique n'a pas de sens ici !
- Prendre en compte le caractère circulaire des données. Analogue circulaire de la loi normale ?

« Fitter » une gaussienne sur l'histogramme ?

- Gaussienne caractérisée par sa moyenne et sa variance
- On traite des données angulaires
- Moyenne de l'échantillon $\alpha = (0°, 30°, 350°)$?
- Moyenne arithmétique $= 130° \neq$ orientation $\simeq 0°$
- La moyenne arithmétique n'a pas de sens ici !
- Prendre en compte le caractère circulaire des données.
  Analogue circulaire de la loi normale ?

La loi de Von Mises sur le cercle

Loi de Von Mises. La loi de $VM(\mu, \kappa)$ est caractérisée par la densité de probabilité

$$\rho(\alpha; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp[\kappa \cos(\alpha - \mu)]$$

où I_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0, μ la moyenne, et κ la concentration (variance^{-1})

$\boxed{\Rightarrow}$ Recours à la **ToolBox CircStats** développée sous Matlab
$\boxed{\Rightarrow}$ L'angle μ résulte d'une moyenne **vectorielle** des

$$\vec{r_i} = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Résultat obtenu incohérent... Cause ?

Données sur un demi-cercle

Les données dont nous disposons sont des angles α_i dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puisque l'on s'intéresse uniquement aux orientations. N'importe quel intervalle de longueur π convient

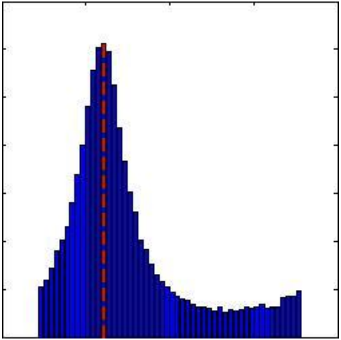


Figure: Mise en évidence de la π-périodicité de la densité

Données sur un demi-cercle

Direction moyenne. Soit R le vecteur aléatoire dont sont issues les réalisations $\vec{r_i} = (\cos\alpha_i, \sin\alpha_i)$. $R = (\cos A, \sin A)$ où A est une v.a angulaire. On note $a = \mathbb{E}[\cos A]$ et $b = \mathbb{E}[\sin A]$. La direction moyenne μ est telle que :

$$\sqrt{a^2 + b^2} e^{i\mu} = a + ib$$

Soit f la densité de la variable aléatoire A. En général

$$\mu \neq \int_0^{2\pi} \alpha f(\alpha) d\alpha$$

Proposition. Soit A une loi de probabilité sur le cercle telle que sa fonction de densité soit π-périodique :

$$\forall \alpha \in [0, 2\pi[, \quad f(\alpha + \pi) = f(\alpha)$$

alors la direction moyenne n'est pas définie, car $a = b = 0$.

Preuve. On découpe l'intégrale correspondant à $a = \mathbb{E}[\cos A]$ en 2 parties[1], on utilise la π-périodicité[2] et un changement de variable[3]

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\cos A] &= \int_0^{2\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha \\
&\overset{1}{=} \int_0^{\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha \\
&\overset{2}{=} \int_0^{\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\alpha - \pi) f(\alpha - \pi) d\alpha \\
&\overset{3}{=} \int_0^{\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha - \int_{0}^{\pi} \cos(\beta) f(\beta) d\beta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On obtient de façon similaire $\mathbb{E}[\sin A] = 0$.

Loi de mélange de Von Mises-Fisher

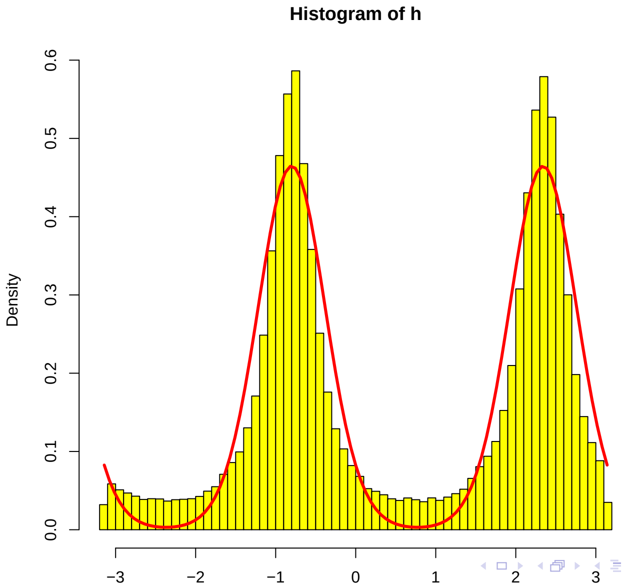
Idée. Ramener l'étude sur $[-\pi, \pi]$, donc sur le cercle entier, en symétrisant les données de l'histogramme.
$\boxed{\Rightarrow}$ Création artificielle d'un deuxième pic identique
$\boxed{\Rightarrow}$ Puis travailler avec 2 lois de Von Mises de manière à les détecter tous les deux.

Loi de mélange de Von Mises-Fisher. La loi de probabilité $\mathit{VMF}(\alpha, \mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2, \beta_1, \beta_2)$ est caractérisée par la loi de densité de mélange suivante :

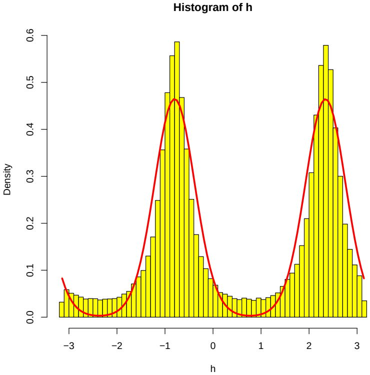
$$\boxed{\rho(\alpha; \mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2) = \beta_1 \rho_1(\alpha; \mu_1, \kappa_1) + \beta_2 \rho_2(\alpha; \mu_2, \kappa_2)}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont des densités de loi de Von Mises classique, et les pondérations vérifient $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

Loi de mélange de Von Mises-Fisher



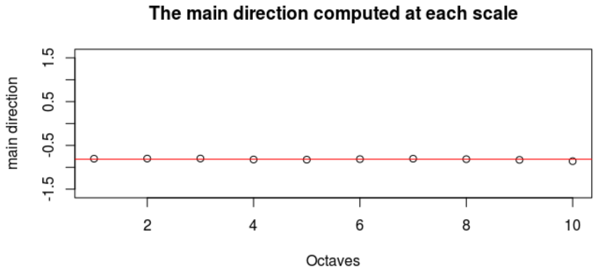
Loi de mélange de Von Mises-Fisher

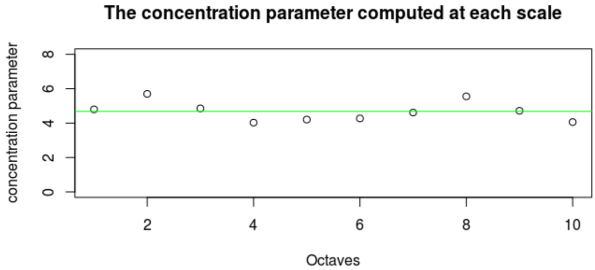


De part la symétrie $\mu_1 + \pi \simeq \mu_2$, $\kappa_1 \simeq \kappa_2$ et $\beta_1 \simeq \beta_2 \simeq 0.5$.
Pour être exact il aurait donc fallu minimiser sous contraintes

$$\rho(\alpha; \mu, \kappa) = \frac{1}{2}\rho_1(\mu + \pi, \kappa) + \frac{1}{2}\rho_2(\mu, \kappa)$$

Evolution des paramètres sur les échelles





Concentration cohérente ?

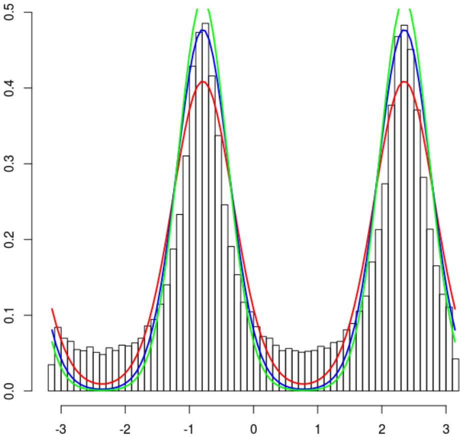


Figure: $\kappa_{est} = 4.87$ (rouge), $\kappa_2 = 6$ (bleu) et $\kappa_3 = 7$ (vert)

Limites du modèle de VMF

- Courbes densités normales décroîent trop vite
- Répartition des angles entre les pics ignorée
- Loi de Von Mises-Fisher non adaptées aux données
- Recours aux lois de densité à queue lourde ?

Limites du modèle de VMF

- Courbes densités normales décroîent trop vite
- Répartition des angles entre les pics ignorée
- Loi de Von Mises-Fisher non adaptées aux données
- Recours aux lois de densité à queue lourde ?

Limites du modèle de VMF

- Courbes densités normales décroîent trop vite
- Répartition des angles entre les pics ignorée
- Loi de Von Mises-Fisher non adaptées aux données
- Recours aux lois de densité à queue lourde ?

Limites du modèle de VMF

- Courbes densités normales décroîent trop vite
- Répartition des angles entre les pics ignorée
- Loi de Von Mises-Fisher non adaptées aux données
- Recours aux lois de densité à queue lourde ?

Plan de l'exposé

Conclusion et perspectives

Bilan

- Etude de différents modèles de textures aléatoires basés sur le Brownien fractionnaire.
- Simulation du champ Brownien fractionnaire anisotrope
- Développement d'une interface graphique Simulation/Détection
- Validation numérique des résultats théoriques du CBFA
- Mise en évidence de l'anisotropie par analyse d'orientations via la transformée en ondelettes monogéniques
- Modélisation statistique des histogrammes permettant de détecter l'orientation d'une texture unidirectionnelle

Conclusion et perspectives

Bilan

- Etude de différents modèles de textures aléatoires basés sur le Brownien fractionnaire.
- Simulation du champ Brownien fractionnaire anisotrope
- Développement d'une interface graphique Simulation/Détection
- Validation numérique des résultats théoriques du CBFA
- Mise en évidence de l'anisotropie par analyse d'orientations via la transformée en ondelettes monogéniques
- Modélisation statistique des histogrammes permettant de détecter l'orientation d'une texture unidirectionnelle

Conclusion et perspectives

Bilan

- Etude de différents modèles de textures aléatoires basés sur le Brownien fractionnaire.
- Simulation du champ Brownien fractionnaire anisotrope
- Développement d'une interface graphique Simulation/Détection
- Validation numérique des résultats théoriques du CBFA
- Mise en évidence de l'anisotropie par analyse d'orientations via la transformée en ondelettes monogéniques
- Modélisation statistique des histogrammes permettant de détecter l'orientation d'une texture unidirectionnelle

Conclusion et perspectives

Bilan

- Etude de différents modèles de textures aléatoires basés sur le Brownien fractionnaire.
- Simulation du champ Brownien fractionnaire anisotrope
- Développement d'une interface graphique Simulation/Détection
- Validation numérique des résultats théoriques du CBFA
- Mise en évidence de l'anisotropie par analyse d'orientations via la transformée en ondelettes monogéniques
- Modélisation statistique des histogrammes permettant de détecter l'orientation d'une texture unidirectionnelle

Conclusion et perspectives

Bilan

- Etude de différents modèles de textures aléatoires basés sur le Brownien fractionnaire.
- Simulation du champ Brownien fractionnaire anisotrope
- Développement d'une interface graphique Simulation/Détection
- Validation numérique des résultats théoriques du CBFA
- Mise en évidence de l'anisotropie par analyse d'orientations via la transformée en ondelettes monogéniques
- Modélisation statistique des histogrammes permettant de détecter l'orientation d'une texture unidirectionnelle

Conclusion et perspectives

Bilan

- Etude de différents modèles de textures aléatoires basés sur le Brownien fractionnaire.
- Simulation du champ Brownien fractionnaire anisotrope
- Développement d'une interface graphique Simulation/Détection
- Validation numérique des résultats théoriques du CBFA
- Mise en évidence de l'anisotropie par analyse d'orientations via la transformée en ondelettes monogéniques
- Modélisation statistique des histogrammes permettant de détecter l'orientation d'une texture unidirectionnelle

Conclusion et perspectives

Perspectives

- Régler les problèmes de capture de la variance : densités à queue lourde ?
- Effectuer des tests d'hypothèses qui nous renseigneraient sur la présence d'anisotropie ou non.
- Régler le problème multidirectionnel : contrecarrer les limites de l'ondelette isotrope de Morlet, ondelettes directionnelles ?
- Affiner la détection d'orientation pour obtenir des modes plus étroîts

Conclusion et perspectives

Perspectives

- Régler les problèmes de capture de la variance : densités à queue lourde ?
- Effectuer des tests d'hypothèses qui nous renseigneraient sur la présence d'anisotropie ou non.
- Régler le problème multidirectionnel : contrecarrer les limites de l'ondelette isotrope de Morlet, ondelettes directionnelles ?
- Affiner la détection d'orientation pour obtenir des modes plus étroîts

Conclusion et perspectives

Perspectives

- Régler les problèmes de capture de la variance : densités à queue lourde ?
- Effectuer des tests d'hypothèses qui nous renseigneraient sur la présence d'anisotropie ou non.
- Régler le problème multidirectionnel : contrecarrer les limites de l'ondelette isotrope de Morlet, ondelettes directionnelles ?
- Affiner la détection d'orientation pour obtenir des modes plus étroîts

Conclusion et perspectives

Perspectives

- Régler les problèmes de capture de la variance : densités à queue lourde ?
- Effectuer des tests d'hypothèses qui nous renseigneraient sur la présence d'anisotropie ou non.
- Régler le problème multidirectionnel : contrecarrer les limites de l'ondelette isotrope de Morlet, ondelettes directionnelles ?
- Affiner la détection d'orientation pour obtenir des modes plus étroîts

Merci de votre attention. Des questions ?

Références principales

Hermine Biermé, Lionel Moisan, Frédéric Richard, et al.
A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional brownian fields (2012).

Aline Bonami and Anne Estrade.
Anisotropic analysis of some gaussian models (2003).

Michael Felsberg and Gerald Sommer.
The monogenic signal (2001).

Coeurjolly Jean-Francois.
Simulation and identification of the fractional brownian motion : Abibliographical and comparative study (2000).

Sofia C Olhede and Georgios Metikas.
The monogenic wavelet transform (2009).