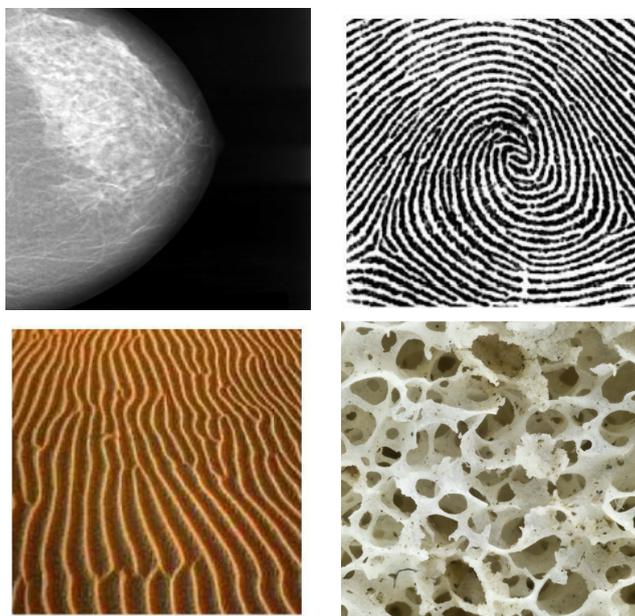


Génération de textures comme champs aléatoires et détection de l'anisotropie



Préparé par :

KÉVIN POLISANO
kevin.polisano@ensimag.fr

Encadré par :

VALÉRIE PERRIER **MARIANNE CLAUSEL**
valerie.perrier@imag.fr marianne.clausel@imag.fr

20 juin 2013

Résumé

L'analyse d'image est une question importante dont les applications sont nombreuses : imagerie médicale (analyse d'images issues de mammographie pour la détection du cancer du sein), géologie (analyse de reliefs), etc. Dans chaque cas, il s'agit d'extraire d'une image des caractéristiques pertinentes permettant de la décrire. Dans bien des situations, l'image qu'on cherche à analyser est anisotrope, c'est-à-dire ses propriétés sont différentes suivant les directions considérées. C'est le cas lorsqu'on analyse des radiographies d'os afin de diagnostiquer l'ostéoporose, mais aussi lorsqu'on caractérise des surfaces de fractures.

Une question naturelle est alors de savoir comment définir mathématiquement cette notion d'anisotropie d'une image, une autre question étant alors éventuellement d'estimer le degré d'anisotropie d'une image donnée de manière robuste. L'objectif du travail est d'explorer quelques pistes de réflexion autour de ces questions à travers l'étude de différents modèles aléatoires de textures anisotropes. On fera ensuite le lien entre l'analyse, par une transformée en ondelettes adaptée, la transformée en ondelettes monogénique, de modèles et leurs propriétés d'anisotropie.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Outils mathématiques pour la modélisation aléatoire	5
2.1	Processus stochastiques, champs aléatoires, champs multivariés	5
2.1.1	Définitions	5
2.1.2	Propriétés de stationnarité, gaussianité et autosimilarité	7
2.1.3	Exemple du mouvement Brownien 1D	7
2.2	Distributions aléatoires	10
2.2.1	Définition d'une distribution aléatoire tempérée gaussienne (DATG)	10
2.2.2	Exemple du bruit blanc	12
2.3	Représentation spectrale	13
2.3.1	Intégrale stochastique	13
2.3.2	Représentation spectrale des distributions aléatoires stationnaires	16
3	Quelques exemples de processus et champs aléatoires classiques	17
3.1	Mouvement Brownien fractionnaire	17
3.1.1	Régularité Höldérienne	17
3.1.2	Définition et propriétés du mouvement Brownien fractionnaire (mBf)	18
3.2	Champs aléatoires généralisant le mB et le mBf	19
3.2.1	Champ de Wiener-Chensov	19
3.2.2	Champ Brownien de Lévy	19
3.2.3	Champ Brownien fractionnaire	20
3.3	Un exemple anisotrope : le champ Brownien fractionnaire anisotrope (CBFA)	20
3.4	Le modèle de Tafti et Unser	22
4	Simulations numériques du CBFA	24
4.1	Simulation d'un mBf 1D par matrices circulantes	24
4.2	Simulation du modèle d'Estrade et Bonami par « bandes tournantes »	25
4.3	Résultats obtenus	29
5	Détection de l'anisotropie	33
5.1	Le signal monogénique	33
5.1.1	Le signal analytique obtenu par la transformée d'Hilbert	33
5.1.2	Le signal monogénique obtenu par la transformée de Riesz	36
5.2	Détermination des orientations par la transformée en ondelettes monogéniques	37
5.3	Analyse statistique des orientations	41
6	Conclusion et perspectives	46
7	Annexes	47
7.1	Fonctionnement de la ToolBox	47
7.2	Fonctionnement des fichiers R d'analyse statistique	49

Table des figures

1	Illustration d'un processus aléatoire	5
2	Simulation du mouvement Brownien	10
3	Simulation du mBf pour $H = 0.8$ (à gauche) et $H = 0.2$ (à droite)	19
4	Fourier Slice Theorem	21
5	Simulation du modèle d'Unser pour $H = 0.5$ et $\xi = (100, 0)$. Figure tirée de la page de Tafti : http://bigwww.epfl.ch/tafti/gal/vfBm/	24
6	Type 1. mBf pour $H = 0.2$, $H = 0.5$ et $H = 0.8$. A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante	29
7	Type 2. $(dir_1, dir_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$ A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante	30
8	Type 3. $dir_1 = 0$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$ A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante	30
9	Type 4. $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$ A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante	30
10	Type 5. $dir_1 = -\frac{\pi}{4}$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$ A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante	31
11	Type 6. $(dir_1, dir_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.2)$ et $H = 0.8$ A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante	31
12	Type 7. $(dir_1, dir_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$ A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante	31
13	Analyse de la régularité d'un profil d'orientation θ (en rouge) et de la transformée de Radon dans la direction θ	32
14	Cosinus dont la phase varie (à gauche) et modulé également en amplitude (à droite)	33
15	Passage à la notation complexe d'un point de vue spectral	34
16	$TH[s]$ et s sont en quadrature	35
17	Visualisation de la phase et de l'amplitude du signal analytique	35
18	Variations de l'amplitude et de la phase du signal analytique	35
19	Visualisation de la phase φ et de l'orientation θ du signal monogénique	37
20	Analyse des orientations à une échelle donnée. En haut à gauche : texture analysée, en bas à gauche : champ de vecteurs d'orientation, en haut à droite : colormap des angles d'orientation formés par les vecteurs, en bas à droite : histogramme des orientations sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	38
21	Visualisation circulaire de l'histogramme théorique de la texture analysée Figure 20 (à gauche) et empirique (à droite)	39
22	Texture anisotrope et histogramme des orientations	40
23	Texture isotrope et histogramme des orientations plat	40
24	Texture orientée dans 2 directions et histogramme correspondant	41
25	Mise en évidence de la π -périodicité de la densité	42
26	Approximation d'une loi de mélange de Von Mises-Fisher sur l'histogramme empirique	43
27	Calcul de la direction moyenne et de la concentration sur 10 échelles	44
28	$\kappa_{est} = 4.87$ (en rouge), $\kappa_2 = 6$ (en bleu) et $\kappa_3 = 7$ (en vert)	45
29	Zones de la Toolbox	47
30	ToolBox d'analyse des orientations	48
31	ToolBox d'analyse des orientations	49

1 Introduction

L'objectif de ce stage est double, on souhaite être en mesure de :

- Générer des images de textures possédant certaines propriétés, principalement d'orientations (ou encore de régularité).
- Détecter l'anisotropie ainsi introduite via la transformée en ondelettes monogéniques

Une image de texture peut être vue comme la réalisation d'un champ aléatoire. La première partie de ce travail va donc consister à définir rigoureusement ce qu'est un champ aléatoire et plus généralement une distribution aléatoire. On s'intéressera plus particulièrement aux champs et distributions aléatoires possédant certaines propriétés statistiques - propres aux textures - que nous définirons, ainsi qu'à leur représentation spectrale. L'étude en parallèle du mouvement Brownien et du bruit blanc illustrera ces notions théoriques. Nous posons ainsi le cadre et les outils mathématiques probabilistes dont nous avons besoin pour définir des modèles de texture.

Une deuxième partie est consacrée à l'étude de différents modèles aléatoires issus de la littérature. Tous s'appuient sur des généralisations du mouvement Brownien, mais les champs aléatoires résultants possèdent des caractéristiques propres. Nous avons décidé par la suite de nous attarder sur le modèle du champ Brownien fractionnaire anisotrope [3].

La simulation numérique de ce modèle fait l'objet de la troisième partie. Ma première contribution porte sur l'implémentation sous Matlab de ce programme de simulation. J'ai développé une interface graphique qui permet à l'utilisateur de générer et de visualiser une texture en jouant sur les paramètres du modèle. J'analyse ensuite les résultats obtenus en distinguant les différents type d'anisotropie repérés, et je valide numériquement certaines propriétés théoriques du modèle.

La dernière partie consiste à détecter l'anisotropie dans ces textures à l'aide de la transformée en ondelettes monogéniques, qui fera correspondre l'anisotropie à un champ de vecteurs d'orientation. On commence ainsi par y définir la notion de signal monogénique, dont l'information de phase et d'orientation d'un signal 2D a l'avantage d'être facilement interprétable géométriquement. J'ai ensuite intégré à ma ToolBox la décomposition en ondelettes monogéniques, permettant ainsi à l'utilisateur de visualiser sur chaque bande de fréquences, le champ des vecteurs d'orientations, et donc de mettre en évidence l'anisotropie. Enfin, dans le but d'automatiser la détection des orientations dominantes, j'effectue une analyse statistique des histogrammes angulaires en R.

Nous conclurons cette étude en précisant les limites des méthodes proposées et les perspectives d'améliorations pour la suite du stage.

2 Outils mathématiques pour la modélisation aléatoire

2.1 Processus stochastiques, champs aléatoires, champs multivariés

2.1.1 Définitions

Motivation. Dans de nombreux domaines, on utilise des observations en fonction du temps (ou encore d'une variable d'espace). Dans les cas les plus simples, ces observations se traduisent par une courbe bien définie $t \mapsto f(t)$. En réalité, les observations se présentent souvent de manière plus ou moins erratique. Il est donc tentant d'introduire des probabilités. Ainsi un processus aléatoire (ou *stochastique*) généralise la notion de variable aléatoire utilisée en statistiques élémentaires. On le définit comme une famille de variables aléatoires $(X(t))$, associées à toutes les valeurs $t \in T$. L'ensemble des observations disponibles $x(t)$, constitue une *réalisation* du processus. Un processus dépend donc à la fois du temps et du hasard, c'est donc une fonction :

$$(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$$

On peut alors voir le processus de 2 manières :

- Pour t fixé, l'état du système est une variable aléatoire $X(\cdot, \omega)$
- Pour ω fixé, c'est-à-dire pour une évolution particulière du système, les états successifs sont représentés par la fonction $t \mapsto X(t, \cdot)$ qui est donc une *trajectoire* ou *réalisation* (décrivant par exemple la position d'une particule)

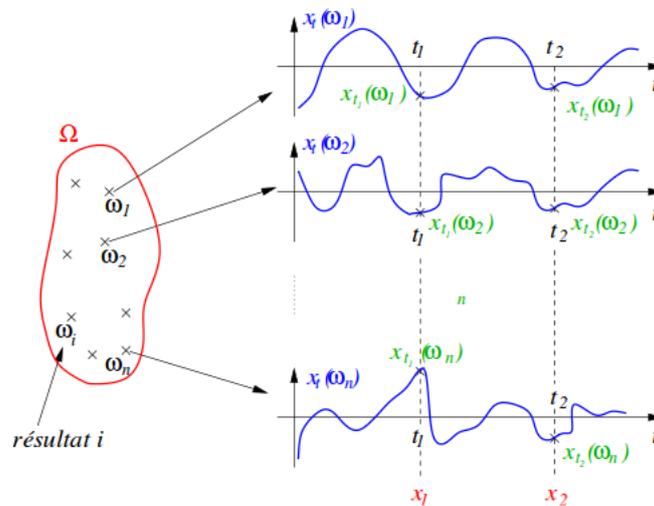


Figure 1 – Illustration d'un processus aléatoire

De manière plus générale, si t ne représente plus le temps on a la définition suivante :

Définition. Soit $d \geq 1$ et T un ensemble d'indices inclu dans \mathbb{R}^d , on appelle *champ aléatoire* défini sur T à valeur dans l'espace mesurable (E, \mathcal{E}) le terme

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (X_t)_{t \in T})$$

constitué d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ appelé espace de base et d'une famille (X_t) de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans (E, \mathcal{E}) .

Remarque : Dans le cas où $d = 1$ on parle de *processus stochastique* et t représente le temps.

Exemple. On s'intéresse au déplacement dans l'espace d'une particule ponctuelle soumise à des perturbations aléatoires, qui dépend donc bien à la fois du temps et du hasard. Si on se limite à l'intervalle de temps $T = [0, 1]$, l'ensemble des éventualités naturel est $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R}^3)$: un élément de $\omega \in \Omega$, une trajectoire possible, est une fonction continue $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Comme l'espace dans lequel vit la particule est \mathbb{R}^3 on a $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$. La tribu \mathcal{F} sur Ω est alors la plus petite tribu qui rende mesurables toutes les applications coordonnées :

$$\begin{array}{ccc} E^T = C([0, 1], \mathbb{R}^3) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \omega(t) \end{array}$$

Il resterait à construire la probabilité \mathbb{P} , pour laquelle de multiples choix sont possibles. L'exemple le plus important à la fois du point de vue théorique et pour les applications, est la mesure de Wiener, qui est la loi du mouvement Brownien que nous allons voir plus loin.

De manière analogue dans le cas général si on note E^T l'ensemble des applications de T dans E et π_t l'application coordonnée de E^T dans l'espace facteur d'indice t , c'est-à-dire si $f \in E^T$ on a $\pi_t(f) = f(t)$. Rappelons que si l'espace E est muni d'une tribu \mathcal{E} , l'espace E^T peut être muni de la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes T}$ qui peut être définie indifféremment comme :

- La tribu sur E^T engendrée par les pavés mesurables, c'est-à-dire les ensembles de la forme

$$\pi_{t_1}^{-1}(A_1) \cap \pi_{t_2}^{-1}(A_2) \cap \dots \cap \pi_{t_n}^{-1}(A_n)$$

pour $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$

- Ou comme on l'a vu la plus petite tribu sur E^T rendant mesurables les applications coordonnées π_t à valeur (E, \mathcal{E})

Lois marginales d'un champ aléatoire. Ce que l'on peut connaître par l'expérience, ce sont les *lois conjointes* des n – *uplets* $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ des n variables aléatoires à valeur dans l'espace d'état (E, \mathcal{E}) représentant l'état du système aux points $S = (t_1, \dots, t_n)$. Ces lois μ_S sont appelées les *lois marginales du champ aléatoire*.

\Rightarrow Comment construire mathématiquement un champ aléatoire ayant ces lois marginales μ_S supposées données et *compatibles* (c'est-à-dire si $S' \subset S$ alors $\pi_{S'} = \pi_S(\pi_{S'})$) ?

On considère l'espace d'état (E, \mathcal{E}) , on prend comme espace de base (Ω, \mathcal{F}) l'espace produit $(E^{\mathbb{R}}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}})$, et on prend pour X_t les applications coordonnées de $E^{\mathbb{R}}$ dans chacun des espaces facteur s , c'est-à-dire que si $\omega \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ on a $X_t(\omega) = \omega(t)$. De manière informelle les événements ici sont des fonctions ω et la réalisation $X_t(\omega)$ est la fonction dépendant du temps t . Enfin la loi de probabilité μ sur (Ω, \mathcal{F}) s'obtient par le théorème de Kolmogorov :

Théorème de Kolmogorov. Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble d'indices, soit l'espace mesurable $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Soit pour chaque partie finie S de T de probabilité μ_S compatibles sur $(E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})$ alors il existe une probabilité unique μ sur $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T})$ telle que $\pi_S(\mu) = \mu_S$, appelée *limite du système compatible* μ_S .

Les champs aléatoires que l'on souhaite modéliser par la suite doivent vérifier certaines propriétés physiques, telles que la stationnarité et l'autosimilarité, que l'on formalise mathématiquement ci-après.

2.1.2 Propriétés de stationnarité, gaussianité et autosimilarité

Champ aléatoire stationnaire au sens strict. Un champ aléatoire est dit strictement stationnaire quand les lois dimensionnelles sont invariantes par translation, c'est-à-dire que $(X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0))$ et $(X_1(t_0 + h), X_2(t_0 + h), \dots, X_n(t_0 + h))$ ont les mêmes lois.

Champ stationnaire au sens large. Un champ est dit stationnaire à l'ordre 2 quand :

1. Les espérances $E(X_t) = C$ et les variances $Var(X_t) = E((X_t - C)^2) = \gamma_0$ ne dépendent pas de t , autrement dit le signal oscille autour d'une moyenne fixe et dans des bornes fixes ne dépendant pas de t .
2. Les covariances $Cov(X_t X_{t-j}) = E((X_t - C)(X_{t-j} - C)) = \gamma_j$ ne dépendent pas de t mais seulement du délai entre X_t et X_{t-j} . Autrement dit pour un processus si on coupe la série en deux la partie droite et gauche ont des comportements similaires.

Autosimilarité stricte. Si (X_t) est un champ aléatoire et $H \in \mathbb{R}$, il est dit autosimilaire d'ordre H en loi si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\{X(\lambda t), t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^H X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$$

La définition au sens stricte implique celle au second ordre, plus faible, énoncée ci-dessous. La réciproque n'est vraie que dans le cas gaussien.

Autosimilarité au second ordre. Un champ aléatoire est dit autosimilaire d'ordre H au second ordre si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, t et s dans \mathbb{R}^d :

$$\mathbb{E} [X(\lambda t) \overline{X(\lambda s)}] = \lambda^{2H} \mathbb{E} [X(t) \overline{X(s)}]$$

L'autosimilarité reflète une invariance par changement d'échelle. Ce phénomène est souvent observé dans la nature et son estimation donne une mesure de l'irrégularité du phénomène.

Champ aléatoire gaussien. Un champ aléatoire est dit gaussien quand toutes ses lois finies dimensionnelles $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ sont gaussiennes. Autrement dit $X = (X_t)$ est gaussien si toute combinaison linéaire $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne.

Nous allons à présent étudier un exemple célèbre de processus dont les propriétés statistiques sont remarquables : le mouvement Brownien en 1D. Celui-ci nous sera par la suite particulièrement utile dans nos modèles de textures aléatoires.

2.1.3 Exemple du mouvement Brownien 1D

Historiquement. Le mouvement Brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen de *Clarkia pulchella* (une espèce de fleur sauvage nord-américaine), puis de diverses autres plantes.

Approche. La difficulté de modélisation du mouvement Brownien réside dans le fait que ce mouvement est aléatoire et que statistiquement, le déplacement est nul : il n'y a pas de mouvement d'ensemble, contrairement à un vent ou un courant. Plus précisément :

- à un instant donné, la somme vectorielle des vitesses de toutes les particules s'annule (il n'y a pas de mouvement d'ensemble) ;
- si l'on suit une particule donnée au cours du temps, le barycentre de sa trajectoire est son point de départ, elle virevolte autour du même point.

Il est difficile dans ces conditions de caractériser le mouvement. La solution fut trouvée par Louis Bachelier, et présentée dans sa thèse soutenue le 29 mars 1900. Il démontra que ce qui caractérise le mouvement, ce n'est pas la moyenne arithmétique des positions $\langle X \rangle$ mais la moyenne quadratique $\sqrt{\langle X^2 \rangle}$.

Hypothèses. Les hypothèses raisonnables suivantes ont été prises par Einstein :

1. $X_{t+h} - X_t$ est indépendant de $\sigma\{X_s, s \leq t\}$ ¹, ce qui revient à dire que les chocs qui vont intervenir dans $[t, t+h]$ vont déterminer le mouvement durant cet intervalle de temps, c'est-à-dire qu'on néglige l'effet de l'inertie de la particule à l'instant t .
2. La loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t , ce qui signifie que la situation reste identique à elle-même dans le temps (la température ne change pas).
3. Les trajectoires sont continues.

(X_t) est ainsi ce que l'on appelle un processus à accroissements indépendants stationnaires :

Processus à accroissements indépendants stationnaires (PAIS). Un PAIS est un processus à valeur dans \mathbb{R}^d tel que :

- a) $\forall s < t, X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma\{X_u, u \leq s\}$ engendrée par les ensembles $\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{E}\}$
- b) La loi de $X_t - X_s$ ne dépend que de $t - s$
- c) (X_t) est à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche

Remarque : le point b) est équivalent à dire que $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes. Cela implique également que X_t est un processus de Markov, c'est-à-dire que la loi conditionnelle de $X_{t_{n+1}}$ sachant le passé ne dépend que de l'état précédent X_{t_n} :

$$P(X_{t_{n+1}} = x \mid X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = P(X_{t_{n+1}} = x \mid X_{t_n})$$

Moments d'ordre 2. On montre aussi que si X_t satisfait ces hypothèses et $X_0 = 0$ (on se ramène à ce cas en considérant $X_t - X_0$) alors X_t suit une loi normale d'espérance Ct et de variance $\sigma^2 t$. On voit alors que $\sqrt{\mathbb{E}|X_t - X_0|^2} = \sigma\sqrt{t}$ donc que la distance moyenne parcourue par la particule est proportionnelle à \sqrt{t} .

Propriété. Plus précisément, on a vu dans l'hypothèse 2, que la loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t entraîne la stationnarité, et comme les trajectoires sont continues on a finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t - X_0) &= t\mathbb{E}(X_1 - X_0) = Ct \\ \mathbb{E}((X_t - X_0 - Ct)^2) &= \sigma^2 t \end{aligned} \tag{1}$$

1. Soit X une variable aléatoire dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) . La tribu engendrée par X , notée $\sigma(X)$, est la plus petite tribu sur Ω qui rende X mesurable, i.e $\sigma(X) = \{A = X^{-1}(B), B \in \mathcal{E}\}$.

Preuve : En effet on commence par le démontrer pour $t = n$ entier, par linéarité :

$$\mathbb{E}(X_n - X_0) = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1}) + \mathbb{E}(X_{n-1} - X_{n-2}) + \cdots + \mathbb{E}(X_1 - X_0) = n\mathbb{E}(X_1 - X_0) = Cn$$

Puis pour $t = p/q$ on a d'une part

$$\mathbb{E}(X_{qt} - X_0) = Cqt$$

et d'autre part en découpant l'intervalle $[0, qt]$ en q parties :

$$\mathbb{E}(X_{qt} - X_0) = \mathbb{E}(X_{qt} - X_{(q-1)t}) + \cdots + \mathbb{E}(X_t - X_0) = q\mathbb{E}(X_t - X_0)$$

d'où le résultat (1). On étend ensuite à tout réel t par densité et continuité des trajectoires.

Loi normale. En discrétisant n fois $[0, t]$ de manière équirépartie on écrit :

$$X_t - X_0 = (X_{\frac{t}{n}} - X_0) + \cdots + (X_{\frac{(k+1)t}{n}} - X_{\frac{kt}{n}}) + \cdots + (X_t - X_{\frac{(n-1)t}{n}}) \quad (2)$$

où les variables $X_{\frac{(k+1)t}{n}} - X_{\frac{kt}{n}}$ sont indépendantes équidistribuées (et possèdent des moments à l'ordre 2!). Ainsi en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ le théorème central limite nous apprend que $X_t - X_0$ suit une loi normale.

Mouvement Brownien. Le mouvement Brownien (B_t) est l'unique processus stochastique dépendant du temps t qui vérifie :

1. (accroissements indépendants) Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ est indépendant du processus $(B_u)_{0 \leq u \leq s}$ avant le temps s .
2. (accroissement stationnaire et gaussien) Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $t - s$.
3. $(B_t)_{t \geq 0}$ est presque sûrement continu, c'est-à-dire pour toute réalisation, la fonction trajectoire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.
4. $B_0 = 0$ p.s. On dit alors que le mouvement Brownien est standard.

Simulation d'un Brownien. En discrétisant l'axe avec un pas Δt on a avec (2) et $B_0 = 0$:

$$B_{n\Delta} = B_{\Delta t} + (B_{2\Delta t} - B_{\Delta t}) + \cdots + (B_{n\Delta t} - B_{(n-1)\Delta t})$$

Et en notant $U_k = B_{k\Delta t} - B_{(k-1)\Delta t}$ qui sont par définition des variables aléatoires normales et indépendantes, on en déduit que $B_{n\Delta t} = X_n$ est une marche aléatoire :

$$X_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

d'où une formule récurrente :

$$X_n = X_{n-1} + U_n$$

Il suffit alors de simuler une variable normale n fois et les points (i, U_i) de la trajectoire sont ensuite reliés par des droites affines.

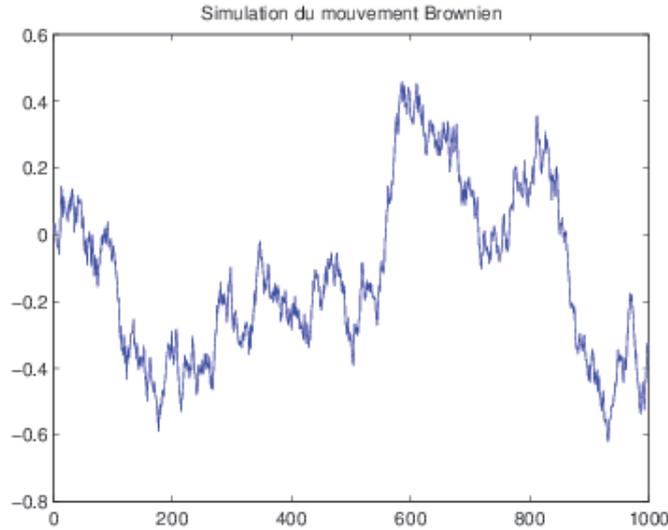


Figure 2 – Simulation du mouvement Brownien

Compléments : Il existe différentes façons de définir le mouvement Brownien, pour ma part ma préférée se trouve dans [13] et [14] où Kahane en fait une introduction géométrique fascinante sous la forme d'une élégante *hélice* dans un espace de Hilbert. Nous en donnons un aperçu dans la Section 2.2.2.

2.2 Distributions aléatoires

Motivation. Nous allons ultérieurement modéliser des textures par des champs aléatoires, dont les réalisations seront des images de textures, donc des signaux très irréguliers qui dépassent le cadre des simples fonctions. Il est nécessaire de travailler non plus avec des champs aléatoires, mais avec des objets plus généraux : des distributions aléatoires dont les trajectoires sont des distributions tempérées. On justifie la nécessité du recours aux distributions dans les articles [16], [11] et [4], dans lesquels les composantes géométrique et texturale de l'image sont modélisées par des distributions sur des espaces spécifiques (typiquement l'espace BV des fonctions à variations bornées pour la géométrie et un Besov pour la texture).

Les distributions aléatoires sont étudiées dans la référence incontournable de Gelfand et Valenkin [10] dont j'expose les idées principales ci-après. Voir aussi [15]

2.2.1 Définition d'une distribution aléatoire tempérée gaussienne (DATG)

Nous considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \mathbb{R}^N$, \mathcal{T} la plus petite tribu contenant tous les pavés $E_1 \times \dots \times E_P \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ où les E_j sont des parties boréliennes de \mathbb{R} que l'on muni de la mesure

$$\mu_j(E_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_j} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

et \mathbb{P} est la mesure produit :

$$\mathbb{P}(E_1 \times \dots \times E_N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)\dots\mu_N(E_N)$$

Grossièrement, une distribution aléatoire tempérée gaussienne est une fonction $X(x, \omega)$ ($x \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega$) telle que pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X(x, \cdot)$ soit une distribution tempérée sur \mathbb{R}^d et que pour tout u appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle X(\cdot, \omega), u \rangle = g(\omega)$$

soit une variable aléatoire gaussienne centrée.

Plus formellement, si on considère l'espace de Hilbert gaussien complexe $\mathcal{H}(\Omega)$ défini comme étant un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{E}[|X|^2] < +\infty\}$ dont les éléments g sont des variables aléatoires gaussiennes isotropes (c'est-à-dire dont la fonction de répartition dans le plan complexe est $\frac{1}{\pi\sigma} e^{-\frac{|z|^2}{2\sigma}}$), alors on a la définition suivante :

Définition. Une distribution aléatoire tempérée gaussienne (DATG) est une application linéaire continue $J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ où $\mathcal{H}(\Omega)$ est un espace de Hilbert gaussien complexe.

Théorème. Soit J une DATG, alors presque sûrement en ω , il existe une distribution tempérée $X(x, \omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait $\langle X(x, \omega), u \rangle = J(u)$

Maintenant que nous avons vu ce qu'est une DATG, définissons sa covariance. Pour cela on considère la forme bilinéaire $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$B(u, v) = \mathbb{E}[\langle X(\cdot, \omega), u \rangle, \langle X(\cdot, \omega), v \rangle]$$

qui a bien un sens car $\langle X(\cdot, \omega), u \rangle \in \mathcal{H}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Le théorème de Schwartz nous apprend qu'il existe une unique distribution tempérée $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telle que $B(u, v) = \langle S, u \otimes v \rangle$

$$\mathbb{E}[\langle X(\cdot, \omega), u \rangle, \langle X(\cdot, \omega), v \rangle] = \int \int S(x, y) u(x) v(y) dx dy, \quad \forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

La distribution tempérée S est appelée la **covariance de la DATG réelle** $X(x, \omega)$.

Caractérisation par la moyenne et la covariance. Une DATG est entièrement caractérisée par sa moyenne et sa covariance. Réciproquement, si on se donne une forme bilinéaire continue $B(u, v)$ et une forme linéaire continue $m(u)$ sur l'espace des fonctions tests, telles que $B(u, v) - m(u)m(v)$ soit définie positive, alors il existe une DATG dont $B(u, v)$ est la covariance et $m(u)$ la moyenne. Les démonstrations figurent dans [10] p.246-257.

Généralisons maintenant aux distributions aléatoires les définitions qui ont été énoncées pour les champs aléatoires :

Distribution aléatoire tempérée stationnaire. Une DATG $J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ est stationnaire si pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\mathbb{E}[J(u)\overline{J(v)}] = \mathbb{E}[J(u_a)\overline{J(v_a)}]$ avec $u_a(x) = u(x - a)$ et $v_a(x) = v(x - a)$.

Ce qui revient à dire qu'il existe $\Gamma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $S(x, y) = \Gamma(x - y)$.

Distribution aléatoire tempérée à accroissements stationnaires. Une DATG $J : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ (où $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace composé des fonctions d'intégrale nulle) est à accroissements stationnaires si pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\mathbb{E}[J(u)\overline{J(v)}] = \mathbb{E}[J(u_a)\overline{J(v_a)}]$ avec $u_a(x) = u(x - a)$ et $v_a(x) = v(x - a)$.

Autosimilarité. Une DATG $J : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ est autosimilaire d'ordre H si pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\mathbb{E}[J(u_a)^2] = a^H \mathbb{E}[J(u)^2]$ avec $u_a(x) = a^{-d} u\left(\frac{x}{a}\right)$.

Donnons maintenant un exemple d'une distribution aléatoire très répandue en physique : le bruit blanc, qui permet de modéliser du bruit. Il nous sera également utile dans la modélisation de texture aléatoire par l'opérateur de « blanchissement » de Tafti et Unser (cf. Section 3.4).

2.2.2 Exemple du bruit blanc

Bruit blanc comme distribution aléatoire. On définit un bruit blanc comme étant une DATG de covariance $\Gamma = \delta_0$. Un bruit blanc réel $Z(x, \omega)$ vérifie donc :

$$B(u, v) = \mathbb{E}[\langle Z(\cdot, \omega), u \rangle \langle Z(\cdot, \omega), v \rangle] = \int u(x)v(x)dx, \quad \forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Comme $B(u, v)$ est une forme bilinéaire définie positive, l'existence du processus gaussien généralisé Z est assurée. De plus l'opérateur défini par $W(u) = \langle Z(\cdot, \omega), u \rangle$ établit une isométrie entre $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{H}_0(\Omega)$ espace de Hilbert gaussien réel. Si on se donne une base (u_n) de $L^2(\mathbb{R}^d)$ et (ξ_n) son image dans $\mathcal{H}_0(\Omega)$, on a $f = \sum \hat{f}_n u_n$ puis $W(f) = \sum \hat{f}_n \xi_n$. Plus généralement on a la représentation du bruit réel par :

$$Z(x, \omega) = \sum g_j(\omega) f_j$$

où les (g_j) forment une b.o.n de \mathcal{H}_0 , donc des v.a i.i.d de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et (f_j)

La convergence de cette série est assurée par le théorème suivant :

Théorème. Soit H un espace de Hilbert, $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite dans H telle que $\sum \|f_j\|_H < +\infty$, et (g_j) une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées vérifiant $\mathbb{E}[|g_j|^2] \leq C < +\infty$. Alors la série $\sum g_j(\omega) f_j$ converge presque sûrement² dans H .

Le **bruit blanc complexe** est simplement défini par :

$$Z(x, \omega) = X(x, \omega) + iY(x, \omega)$$

avec X et Y des bruits blancs réels indépendants. Il vérifie de manière analogue :

$$\mathbb{E}[\langle Z(\cdot, \omega), u \rangle \overline{\langle Z(\cdot, \omega), v \rangle}] = 2 \int u(x)\overline{v(x)}dx, \quad \forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Et cette fois c'est l'opérateur $W(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle Z(\cdot, \omega), u \rangle$ qui établit l'isométrie entre les deux Hilbert complexes. La représentation générale est la même.

Remarque : on peut restreindre l'hypothèse (f_j) b.o.n en l'hypothèse d'un **frame étroit**, qui est plus générale.

Théorème. La transformée de Fourier du bruit blanc complexe est encore le bruit blanc complexe à une constante multiplicative près.

Lien avec le Brownien. Voyons comment à partir de l'isométrie W on peut retrouver le mouvement Brownien (dans le cas 1D). Considérons le processus défini à partir de l'image des $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ par W , c'est-à-dire :

$$X(t, \cdot) \stackrel{def}{=} W(\mathbb{1}_{[0,t]})$$

C'est donc une courbe paramétrée dans \mathcal{H} dont le carré de la longueur d'une corde est facile à calculer, par propriété d'isométrie :

$$\|X(t, \cdot) - X(s, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|W(\mathbb{1}_{[0,t]}) - W(\mathbb{1}_{[0,s]})\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\mathbb{1}_{[0,t]} - \mathbb{1}_{[0,s]}\|_{L^2}^2 = |t - s|$$

2. On dit que X_n converge presque sûrement vers X si $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$, ou de manière équivalente, s'il existe un sous-ensemble \mathbb{P} -négligeable $N \subset \Omega$ tel que $\forall \omega \in \Omega \setminus N, X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega)$

Le processus $X(t, \omega)$ vérifie donc $\mathbb{E}[(X(t, \omega) - X(s, \omega))^2] = |t - s|$ (\star). De plus si on prend trois paramètres $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ dans cet ordre alors on a :

$$\|X(t_3, \cdot) - X(t_1, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 = |t_3 - t_1| = |t_3 - t_2| + |t_2 - t_1| = \|X(t_3, \cdot) - X(t_2, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|X(t_2, \cdot) - X(t_1, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2$$

On a donc $X(t_1, \cdot)$, $X(t_2, \cdot)$ et $X(t_3, \cdot)$ qui forment un « triangle rectangle » dans l'espace \mathcal{H} . L'orthogonalité de $X_{t_3} - X_{t_2}$ et $X_{t_2} - X_{t_1}$ qui résulte de la relation précédente pour le produit scalaire de \mathcal{H} qui est $\langle U_t, U_s \rangle_{\mathcal{H}} = \mathbb{E}[U_t U_s]$ marque leur indépendance ($\star\star$).

De (\star) et ($\star\star$) on en déduit que $X(t, \omega)$ est un mouvement Brownien. On peut retrouver toutes les propriétés de ses réalisations déjà énoncées précédemment en étudiant son expression en tant que image des $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ pour tout t . Dans une base orthonormée (u_n) de L^2 , $f = \sum \langle f, u_n \rangle_{L^2} u_n$ donc $\mathbb{1}_{[0,t]} = \sum \left(\int_0^t u_n(x) dx \right) u_n$ d'où en prenant l'image par W et compte tenu de $W(u_n) = \xi_n$ on a en notant $a_n(t) = \int_0^t u_n(x) dx$:

$$X(t, \omega) = \sum a_n(t) \xi_n(\omega)$$

Cette série est convergente dans \mathcal{H} quand t est fixé (loi forte des grands nombres). Il s'agit d'étudier la convergence de cette série aléatoire quand ω est fixé (cf. [13]), c'est-à-dire la trajectoire $t \mapsto X(t, \omega)$, qui a un comportement très chaotique, car nulle part dérivable comme on l'a déjà souligné. Pour étudier ces propriétés locales il est commode de prendre comme base (u_n) les fonctions d'Hermite ou mieux encore le système de Haar.

2.3 Représentation spectrale

En traitement du signal on est régulièrement amené à travailler dans le domaine des fréquences, principalement pour pouvoir filtrer un signal par le biais de fonctions de transfert. Ce changement de représentation est opéré via la transformée de Fourier qui s'écrit sous forme intégrale. Ainsi pour des signaux qui possèdent de surcroît une composante aléatoire, on aimerait de même pouvoir les représenter dans le domaine spectral, sous forme intégrale, donc d'être capable d'intégrer des champs aléatoires, ce qui nous conduit à définir la notion d'intégrale stochastique. Nous verrons plus loin que la représentation spectrale nous permettra de définir des modèles aléatoires dont on contrôlera les propriétés directement dans le domaine spectral.

2.3.1 Intégrale stochastique

Motivation. Une équation différentielle déterministe est une équation d'évolution du type :

$$dx(t) = f(t, x(t))dt$$

Les équations différentielles stochastiques sont une généralisation où la dynamique déterministe d'évolution f est perturbée par un terme aléatoire (stochastique), comme c'est souvent utilisé en finance. En général la perturbation aléatoire est considérée comme étant du bruit. Par un argument du type Théorème Central Limite, il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement Brownien B_t :

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB_t \quad (3)$$

La solution d'une EDS est aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note X_t . En fait l'écriture (3) est symbolique car dB_t n'a pas vraiment de sens (le mouvement Brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire (3) sous la forme :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(x, X(s))dB_s \quad (4)$$

A l'origine l'intégrale stochastique a donc été construite pour donner un sens à l'intégrale

$$\int_0^t \sigma(x, X(s)) dB_s$$

La construction de l'intégrale stochastique qui va suivre se base sur la référence [17].

Nous avons vu précédemment que l'on pouvait construire une isométrie $W : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}$. Ainsi le processus gaussien W est entièrement caractérisé par la famille de variables aléatoires $\{W(A), A \in \mathcal{F}, \mu(A) < +\infty\}$ où l'on a défini $W(A) = W(\mathbf{1}_A)$. Montrons que $W(A)$ définit ce qu'on appelle une *mesure aléatoire* (cf. [10] Vol.4, p.268).

Définition d'une mesure aléatoire. Soit X un ensemble et une algèbre \mathcal{M} de parties de X (sous-ensemble de $P(X)$ stable par réunions finies et passage au complémentaire). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et V l'ensemble des variables aléatoires définies sur celui-ci. Une mesure aléatoire sur (X, \mathcal{M}) est une application Z de \mathcal{M} dans V telle que :

- si un élément A de \mathcal{M} est une réunion d'une famille dénombrable $A_n \in \mathcal{M}$ deux à deux disjoints (ce que l'on note $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$) alors au sens de la convergence en moyenne :

$$Z(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} Z(A_n)$$

- Il existe une unique mesure σ , appelée intensité associée à Z , telle que :

$$\mathbb{E} [Z(A)\overline{Z(B)}] = \sigma(A \cap B)$$

- Quelque soit l'ensemble A l'espérance de $Z(A)$ est nulle : $\mathbb{E}[Z(A)] = 0$

Propriété. W est une mesure aléatoire.

Preuve. Pour le premier point on montre de manière générale sur un Hilbert quelconque H que l'application $u \in H \mapsto W(u)$ est linéaire, pour cela il suffit de voir que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall u, v \in H$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(W(\lambda u + \mu v) - \lambda W(u) - \mu W(v))^2] &= \|\lambda u + \mu v\|_H^2 \\ &+ \lambda^2 \|u\|_H^2 + \mu^2 \|v\|_H^2 - 2\lambda \langle \lambda u + \mu v, u \rangle_H \\ &- 2\mu \langle \lambda u + \mu v, v \rangle_H + 2\lambda\mu \langle u, v \rangle_H = 0 \end{aligned}$$

Le deuxième est clair car on a supposé W vérifiant :

$$\mathbb{E} [W(A)W(B)] = \mathbb{E} [W(\mathbf{1}_A)W(\mathbf{1}_B)] = \langle \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \rangle_{L^2} = \int \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B d\mu = \int \mathbf{1}_{A \cap B} d\mu = \mu(A \cap B)$$

Et le troisième point fait également partie des hypothèses puisque les v.a gaussiennes sont supposées centrées. □

On a donc défini une nouvelle mesure aléatoire $W(A)$ sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et où $W(A)$ est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, \mu(A))$, car la variance est en effet par propriété d'isométrie :

$$\mathbb{E} [W(\mathbf{1}_A)^2] = \|\mathbf{1}_A\|_{L^2}^2 = \int \mathbf{1}_A^2 d\mu = \int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$$

Remarque : dans le cas où $\mu = dx$ est la mesure de Lebesgue et l'espace est $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx)$ on a donc (pour les intervalles $A = [0, t]$ donc $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{[0,t]}$) $\mathbb{E}[W(\mathbb{1}_{[0,t]})^2] = \mathbb{E}[B_t^2] = dx([0, t]) = t$ et on retrouve bien le Brownien défini dans la section précédente. On appelle donc aussi la mesure gaussienne $W(A) = W(\mathbb{1}_A) = B(A)$, *mesure Brownienne*.

Intégrale stochastique. Une fois définie cette mesure aléatoire, on peut « intégrer par rapport à cette mesure » et donc voir $W(f)$ avec $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ comme une intégrale stochastique. Plus précisément si f est « élémentaire » $f = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ où les A_i sont disjoints, on définit l'intégrale stochastique de u par rapport à la mesure dW par :

$$\int_{\Omega} f dW \stackrel{def}{=} W(f) = \sum_{i=1}^n W(A_i)$$

Et on sait que $f \mapsto \int_{\Omega} f dW$ définit une isométrie de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans \mathcal{H} donc on peut l'étendre à toutes les fonctions de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. On dit que l'on intègre f par rapport à un Brownien, et on notera aussi $\int_{\Omega} f dB$. On souhaite étendre cette construction aux intégrales stochastiques multiples $I_n(f)$ où $f \in L^2(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mu^n)$:

Intégrale stochastique multiple. Soit $\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{F}, \mu(A) < +\infty\}$ et $f \in \mathcal{S}_n$ une fonction élémentaire symétrique à n variables, définie comme suit :

$$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n}}$$

où c_{i_1, \dots, i_n} est égal à 0 si deux indices de i_1, \dots, i_n sont égaux, et les A_i des ensembles disjoints de \mathcal{B}_0 . On définit l'intégrale stochastique multiple pour ces fonctions élémentaires comme étant la quantité :

$$I_n(f) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} B(A_{i_1}) \cdots B(A_{i_n})$$

Alors on démontre les propriétés suivantes (cf. [17] pour la preuve) :

(i) $I_n(f)$ est linéaire

(ii) $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$ où \tilde{f} est la symétrisation de f i.e :

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$$

$$(iii) \mathbb{E}[I_n(f)I_p(g)] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ n! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(\Omega^n)} & \text{si } n = p \end{cases}$$

En prenant $f = g$ dans (iii) on obtient :

$$\mathbb{E}[I_n(f)^2] = n! \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \leq n! \|f\|_{L^2(\Omega^n)}^2$$

Il s'en suit que l'opérateur $f \mapsto I_n(f)$ peut s'étendre en un opérateur linéaire et continu de $L^2(\Omega^n)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfaisant les propriétés (i), (ii) et (iii) et on décide d'écrire l'intégrale stochastique

$$\int_{\Omega^n} f(t_1, \dots, t_n) B(dt_1) \cdots B(dt_n)$$

Intégration contre $d\hat{W}$. Dans la [Section 3.3](#) et [Section 3.1.2](#) nous aurons besoin d'intégrer une fonction contre la transformée de Fourier d'un bruit blanc gaussien \hat{W} . Il suffit de remarquer

que \hat{W} définit une mesure aléatoire complexe, et le même procédé que précédemment permet d'intégrer n'importe quelle fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\hat{W}(x)$$

L'extension au cas d'intégrales multiples est également identique à ce qui précède.

2.3.2 Représentation spectrale des distributions aléatoires stationnaires

Les résultats qui vont suivre sont tirés de Gelfand et Valenkin [10] (Vol.4, p.270-272)

$$\Phi(\varphi) = \langle \Phi, \hat{\varphi} \rangle = \int \hat{\varphi}(\lambda) dZ(\lambda)$$

Ainsi Φ définit une fonction aléatoire linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ i.e une distribution aléatoire.

Remarque : pour être exact la condition de continuité est que la mesure $\sigma(A) = \mathbb{E}[|Z(A)|^2]$ soit tempérée i.e que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{-p} d\sigma(x)$ converge pour un certain $p > 0$.

On montre facilement que celle-ci est **stationnaire** :

- Puisque les variables aléatoires $Z(A)$ sont centrées on a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \mathbb{E}[\Phi(\varphi)] = 0$ donc :

$$\mathbb{E}[\varphi(\cdot)] = \mathbb{E}[\varphi(\cdot + h)] = 0$$

- Par ailleurs la forme bilinéaire de covariance s'écrit :

$$B(\varphi, \psi) = \mathbb{E}[\Phi(\varphi)\Phi(\psi)] = \mathbb{E}\left[\int \hat{\varphi}(\lambda) dZ(\lambda) \int \overline{\hat{\psi}(\mu)} dZ(\mu)\right] = \int \int \hat{\varphi}(\lambda) \overline{\hat{\psi}(\mu)} \mathbb{E}[dZ(\lambda) \overline{dZ(\mu)}]$$

Et compte tenu de $\mathbb{E}[Z(A) \overline{Z(B)}] = \sigma(A \cap B)$ il vient :

$$B(\varphi, \psi) = \int \hat{\varphi}(\lambda) \overline{\hat{\psi}(\lambda)} d\sigma(\lambda)$$

Quand on translate les fonctions tests par h , leur transformée de Fourier est multipliée par $e^{-i\lambda h}$ et donc :

$$B(\varphi(t+h), \psi(t+h)) = \int e^{-i\lambda h} \hat{\varphi}(\lambda) \overline{e^{-i\lambda h} \hat{\psi}(\lambda)} d\sigma(\lambda) = B(\varphi(t), \psi(t))$$

La réciproque de cette proposition est vraie :

Théorème. Soit Φ une distribution aléatoire stationnaire telle que $\mathbb{E}[|\Phi(\varphi)|^2]$ est finie pour toute fonction φ . Alors il existe une mesure aléatoire $Z(A)$ telle que :

$$\Phi = \int e^{i\lambda t} dZ(\lambda)$$

Preuve. Comme $B(\varphi, \psi)$ est une fonction définie positive, elle définit un produit scalaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$: $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = B(\varphi, \psi)$. Nous avons appelé V l'espace vectoriel des variables aléatoires $\Phi(\varphi)$ sur lequel le produit scalaire est $\langle \Phi(\varphi), \Phi(\psi) \rangle_V = \mathbb{E}[\Phi(\varphi) \overline{\Phi(\psi)}] = B(\varphi, \psi)$ d'où

$$\langle \Phi(\varphi), \Phi(\psi) \rangle_V = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)}$$

On en déduit que l'application $\varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est une isométrie de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V , que l'on peut étendre en une isométrie sur les espaces complétés respectifs H et \mathcal{V} . Par ailleurs puisque Φ est stationnaire au sens large on a :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = B(\varphi, \psi) = \int \hat{\varphi}(\lambda) \hat{\psi}(\lambda) d\sigma(\lambda) = \langle \hat{\varphi}, \hat{\psi} \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)}$$

Ainsi l'opérateur $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ définit également une isométrie de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{FD}(\Omega) = \{\hat{\varphi}, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ et comme $\mathcal{FD}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)^*$ on peut étendre cette isométrie de H dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)$.

Finalement on a donc une isométrie (linéaire) I entre les espaces $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)$ et \mathcal{V} . On note alors $Z(A)$ l'image de $\mathbb{1}_A(\lambda) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)$ par I . Il est alors clair que $Z(A)$ définit une mesure aléatoire.

Enfin comme $\hat{\varphi} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)$ peut-être approchée par des fonctions étagées $\sum_{k=1}^n \hat{\varphi}(\lambda_k) \mathbb{1}_{A_n}$ alors son image par I , qui n'est autre que $\Phi(\varphi)$, a pour expression $\sum_{k=1}^n \hat{\varphi}(\lambda_k) Z(A_n)$ c'est-à-dire :

$$\Phi(\varphi) = \int \hat{\varphi}(\lambda) dZ(\lambda)$$

3 Quelques exemples de processus et champs aléatoires classiques

3.1 Mouvement Brownien fractionnaire

Motivation. L'étude de phénomènes irréguliers a pris une place très importante dans beaucoup de domaines de la science : mécanique des fluides, traitement de l'image, mathématiques financières. Les spécialistes de ces domaines s'adressent souvent aux mathématiciens pour leur fournir des modèles sur lesquels les calculs sont simples, et qui soient proches des expériences. On montrera comment l'auto-similarité sert à générer des modèles efficaces. D'autre part l'utilisation de fonctions aléatoires est un outil pratique pour obtenir des exemples génériques. A l'intersection de ces deux techniques se trouvent les processus fractionnaires.

Dans un cadre déterministe, un des outils fondamentaux est la notion de fractale popularisée par Mandelbrot. Dans une fractale un motif élémentaire est répété à chaque échelle par un procédé récurrent. Ce qui facilite l'étude de ces objets est leur auto-similarité : si l'on prend une loupe ou si on les regarde de très loin ils ont toujours la même structure. Cette propriété engendre naturellement de l'irrégularité. Pour la quantifier on a recours à la notion de régularité Höldérienne.

3.1.1 Régularité Höldérienne

On dit qu'une fonction f est H -Höldérienne si :

$$\forall x, y \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^H$$

De plus cette notion peut-être localisée en un point x et l'on définit alors l'exposant de Hölder ponctuel $H(f, x)$:

$$H(f, x) = \sup_{H'} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon^{H'}} = 0 \right\} = \sup_{H'} \left\{ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{H'}, \forall y \right\}$$

En fait on ne considère que des exposants $H < 1$ car pour H égal à 1 la fonction f est continue, de plus toutes les fonctions continûment dérivables sont 1-höldériennes.

3.1.2 Définition et propriétés du mouvement Brownien fractionnaire (mBf)

Mouvement Brownien fractionnaire. Il s'agit de l'unique processus aléatoire gaussien, de moyenne nulle satisfaisant $B_H(0) = 0$, et ayant la propriété que l'accroissement $B_H(x) - B_H(y)$ soit un processus gaussien stationnaire de variance proportionnelle au pas $|x - y|$:

$$\mathbb{E} \left[(B_H(x) - B_H(y))^2 \right] = 2\alpha |x - y|^H$$

où $H \in (0, 1)$ est l'exposant de Hurst. On peut interpréter cette égalité en disant que le mBf est H -hölderien pour l'écart type. De plus, il est autosimilaire, c'est-à-dire :

$$\{B_H(\epsilon x), x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\epsilon^H B_H(x), x \in \mathbb{R}\}, \quad \forall \epsilon > 0$$

L'égalité au sens des lois des processus notée $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ signifie intuitivement que lorsque l'on fait des moyennes en prenant un grand nombre de trajectoires à gauche et à droite du signe égal on obtient des résultats identiques. En ce qui concerne l'irrégularité des trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire, le résultat est encore plus satisfaisant : en tout point $x \in [0, 1]$, en dehors d'un ensemble de trajectoires qui est de probabilité nulle, l'exposant de Hölder ponctuel du mouvement Brownien fractionnaire ne dépend pas du hasard et est égal à H :

$$H(B_H, x) = H \quad p.s$$

Une description plus complète se trouve dans [19] et [21]. En l'occurrence les auteurs ont démontré que le Brownien fractionnaire pouvait s'écrire comme une intégrale stochastique. En effet, en tant que processus gaussien à accroissements stationnaires, le mouvement Brownien fractionnaire admet une densité spectrale $f(\lambda)$, qui représente d'un point de vue physique comment est répartie l'énergie dans les différentes fréquences notées ici λ . Or la propriété d'auto-similarité se traduit sur la densité spectrale par une propriété d'homogénéité, et la relation sur l'écart type fixe le degré d'homogénéité, on en déduit que

$$f(\lambda) = \frac{C_H}{|\lambda|^{H+1/2}}$$

et une représentation harmonisable de type Fourier du mouvement Brownien fractionnaire

$$B_H(x) = \int_{\mathbb{R}} C_H \frac{e^{ix\lambda} - 1}{\|\lambda\|^{H+1/2}} d\widehat{W}(x)$$

Dans la formule ci-dessus on reconnaît avec le terme $e^{ix\lambda}$ une transformation de Fourier inverse où le -1 du numérateur assure que $B_H(0) = 0$, et où la mesure \widehat{W} est un bruit blanc gaussien. On montre facilement que le processus défini par cette intégrale stochastique est à accroissements stationnaires et H -autosimilaire, par unicité on en déduit qu'il s'agit bien de B_H .

Ci-dessous une illustration du mBf. La méthode de simulation sera décrite dans la [Section 4.1](#). On constate bien que plus H est petit et plus la trajectoire est irrégulière.

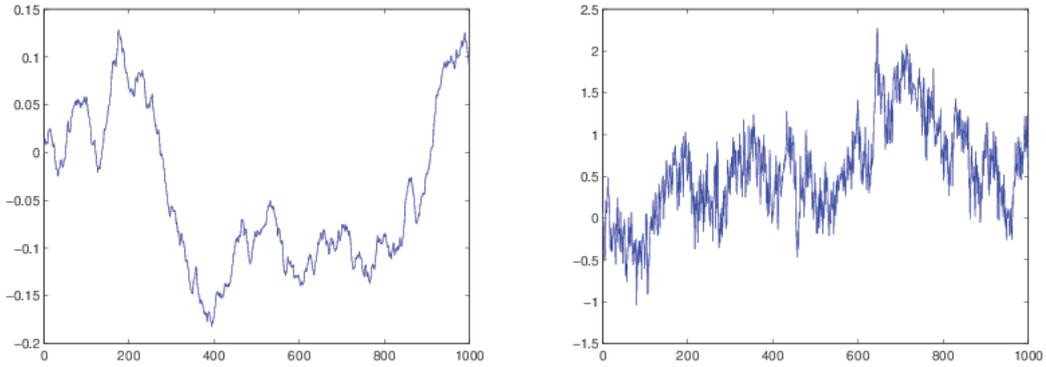


Figure 3 – Simulation du mBf pour $H = 0.8$ (à gauche) et $H = 0.2$ (à droite)

Remarque : Si on remplace H par une fonction $h(x)$ on obtient le **mouvement Brownien multifractionnaire**, qui permet de contrôler le degré d'irrégularité localement en x .

Le mouvement Brownien fractionnaire intervient naturellement dans la modélisation de milieux irréguliers homogènes. Un exemple d'utilisation : le diagnostic d'ostéoporose. En extrayant des lignes des radiographies, dans différentes directions, qu'on modélise par des mouvements Browniens fractionnaires et dont on estime le paramètre de Hurst, on obtient un paramètre H en faisant la moyenne des paramètres obtenus dans les différentes directions. Ce paramètre estimé est plus faible dans le cas ostéoporotique (0.679 ± 0.053) que dans le cas témoin (0.696 ± 0.030). Ces résultats sont encourageants pour une aide au diagnostic mais ne sont pas suffisamment discriminants. En particulier, les médecins ont constaté que les radiographies des ostéoporotiques étaient plus anisotropes que celles des témoins. Cette constatation incite à déterminer un modèle dépendant de paramètres qui rendent compte de l'anisotropie.

3.2 Champs aléatoires généralisant le mB et le mBf

Généralisation en dimension supérieure. Dans le cas du Brownien classique ($H = 1/2$) il existe 2 types de champs aléatoires : le champ de Wiener-Chensov et le champ Brownien de Lévy. Dans les deux cas on généralise la covariance du Brownien :

$$K(s, t) = \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t - s|)$$

3.2.1 Champ de Wiener-Chensov

Afin de conserver la notion d'accroissements indépendants on considère l'ordre suivant sur \mathbb{R}^d : $s \leq t \Leftrightarrow s_i \leq t_i, \forall i$ et le champ de Wiener-Chensov est un champ gaussien centré de covariance :

$$K(s, t) = \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^d (|t_i| + |s_i| - |t_i - s_i|)$$

Ce champ est à accroissements rectangles indépendants mais n'est pas à accroissements stationnaires. Inconvénient : la définition du champ dépend du choix du système de coordonnées (par exemple, il est nul sur les axes). En particulier, il n'est pas invariant par translation.

3.2.2 Champ Brownien de Lévy

Une autre généralisation du mouvement Brownien à la dimension supérieure consiste à remplacer la valeur absolue dans le second membre par la norme euclidienne. On obtient alors le

champ Brownien de Lévy qui est un champ gaussien centré à accroissements stationnaires et isotrope.

$$K(s, t) = \frac{1}{2}(\|t\| + \|s\| - \|t - s\|) \Rightarrow \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = \|t - s\|$$

Inconvénient : par contre, il n'y a pas de généralisation de la propriété d'indépendance des accroissements.

3.2.3 Champ Brownien fractionnaire

Pour un milieu **isotrope** d -dimensionnel, le champ Brownien fractionnaire, qu'on peut définir comme une intégrale stochastique :

$$B_H(x) = \int_{\mathbb{R}^d} C_H \frac{e^{ix \cdot \xi} - 1}{\|\xi\|^{H+d/2}} \widehat{W}(d\xi)$$

apparaît en effet comme un modèle naturel. C'est un champ gaussien centré isotrope, à accroissements stationnaires et autosimilaire d'ordre H : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\{B_H(\lambda t); t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lambda^H \{B_H(t); t \in \mathbb{R}^d\}$$

3.3 Un exemple anisotrope : le champ Brownien fractionnaire anisotrope (CBFA)

Motivation. Par analogie, deux sortes de modèles Browniens fractionnaires ont été considérés dans le but de définir des modèles anisotropes pour les radiographies d'os. D'une part, S. Léger a généralisé le mouvement Brownien fractionnaire à la façon de Wiener-Chentsov et défini dans sa thèse le drap Brownien fractionnaire. D'autre part, A. Bonami et A. Estrade ont considéré des généralisations anisotropes du mouvement Brownien fractionnaire d -dimensionnel (obtenu de la deuxième façon). Plusieurs auteurs ont étudié des modèles plus généraux, pour lesquels le paramètre H est remplacé par une fonction qui dépend de t (multifractionnaire). Cette généralisation paraît adaptée à des milieux non homogènes. Or, on peut considérer, en première approximation, l'os comme un milieu homogène, c'est-à-dire que la moyenne des variations est égale presque partout, ou autrement dit qu'on peut le modéliser par un champ aléatoire gaussien 3D à accroissements stationnaires. A. Bonami et A. Estrade se sont intéressées à des généralisations non isotropes, où le paramètre H est maintenant remplacé par une fonction h dépendant de la direction $\theta = \arg(\xi)$.

Modèle d'Estrade et Bonami. Ce modèle présenté dans [3] et [18] reprend l'idée exposée plus haut sur le diagnostic de l'ostéoporose, à savoir utiliser un mBf sur des lignes radiales et en estimer le paramètre de Hurst, mais en tenant compte cette fois-ci de l'orientation. Comme on veut modéliser la coupe d'os par un champ aléatoire gaussien à accroissements stationnaires (car cette propriété est stable par projection), on considère donc pour tout $t \in \mathbb{R}^2$:

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{it \cdot \xi} - 1}{\|\xi\|^{h(\theta)+1}} d\widehat{W}(\xi)$$

qui est effectivement un champ aléatoire gaussien à accroissements stationnaires.

Objectif : si on considère une ligne d'orientation θ passant par l'origine, on aimerait à partir de ce modèle récupérer l'information d'anisotropie en estimant $h(\theta)$. Le problème est que dans le

cas d'un champ gaussien à accroissements stationnaires, cette ligne paraît isotrope, c'est-à-dire que la régularité est la même dans toutes les directions, à l'exception au plus d'une seule. Il faut donc trouver une alternative pour estimer $h(\theta)$. L'idée provient de la tomographie, elle consiste à moyenner l'image suivant toutes les lignes orthogonales à la direction θ , on obtient un processus 1D dont la régularité est prouvée être égale à $h(\theta) + \frac{1}{2}$. Nous précisons ci-après le lien ainsi établi entre la transformée de Radon et l'anisotropie.

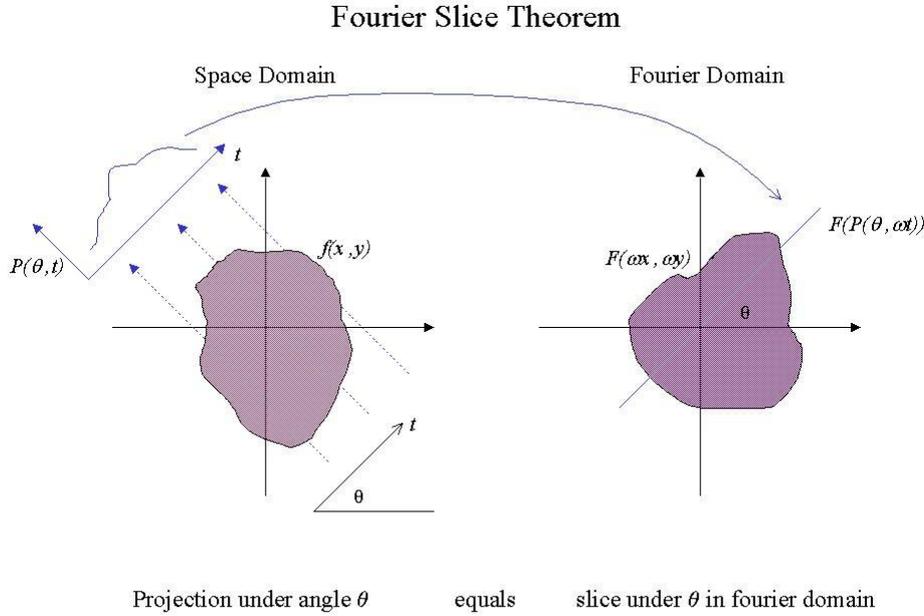


Figure 4 – Fourier Slice Theorem

Comme le modèle de champ X est défini par une représentation spectrale, c'est-à-dire dans le domaine de Fourier par une densité spectrale $f^{1/2}(\xi)$ (en particulier $f^{1/2}(\xi) = |\xi|^{-h(\theta)-1}$ dans le cas qui nous intéresse), non radiale de façon à introduire de l'anisotropie, qu'on souhaite estimer dans la direction θ . Il est alors naturel d'examiner la transformée de Radon des réalisations en Fourier, autrement dit avoir recours au « Fourier Slice Theorem » illustré Figure 4.

Les résultats de régularité du CBFA sont basés sur le résultat général suivant.

Théorème. Soit m et M deux réels, et $X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-it \cdot \xi} - 1) f^{1/2}(\xi) d\xi$. Si la densité spectrale f vérifie les hypothèses suivantes :

- (i) f satisfait la proposition $D(m) : \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall |\xi| > A, f^{1/2}(\xi) \leq B|\xi|^{-(2m+d)}$
- (ii) Pour toute direction $u \in S^{d-1}$ il existe un réel « limite » $\beta(u) \in (0, M]$ tel que
 - $\forall \alpha < \beta(u)$ il existe $A > 0$ telle que : $\forall |\xi| > A$ et $\frac{\xi}{|\xi|} \in \mathcal{V}(S^{d-1}), f^{1/2}(\xi) \leq |\xi|^{-(2\alpha+d)}$
 - $\forall \alpha > \beta(u)$ il existe $A > 0$ telle que : $\forall |\xi| > A$ et $\frac{\xi}{|\xi|} \in \mathcal{V}(S^{d-1}), f^{1/2}(\xi) > |\xi|^{-(2\alpha+d)}$

Soit alors une fenêtre φ continue de $\mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|\hat{\varphi}|^2$ satisfasse $D(M)$. Alors pour toute direction $u \in S^{d-1}$ le processus « moyenné » $p(X \circ R_u, \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (X \circ R_u)(s, t) \varphi(s) ds$ a pour

régularité Höldérienne $\beta(u) + \frac{1}{2}(d-1)$.

Dans le cas du CBFA, la densité spectrale est $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto f^{1/2}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{2h(\xi)+d}}$ où $h : S^{d-1} \rightarrow [m, M] \subset (0, 1)$, vérifie clairement (i) et (ii) avec $\beta(u) = h(u)$. Le théorème stipule donc que pour toute fenêtre φ continue telle que $|\hat{\varphi}| = O(|\xi|^{-1/2(1+d)})$ à l'infini, la régularité Höldérienne de $p(X, \varphi)$ est $h(u) + \frac{1}{2}(d-1)$.

Une fois ce résultat démontré, il faut construire un estimateur de $h(u)$. C'est ce qui est fait dans [18] à partir de variations quadratiques sur la transformée de Radon.

3.4 Le modèle de Tafti et Unser

Motivation. L'idée est de généraliser le mouvement Brownien fractionnaire au cas multivarié en conservant les propriétés intéressantes d'invariances statistiques (auto-similarité et rotation) mais avec des composantes dépendantes. Pour construire un tel champ aléatoire (plus exactement champ stochastique généralisé), on part d'un bruit blanc (distribution aléatoire) et on lui applique un opérateur possédant ces propriétés d'invariances, dont le champ résultant hérite donc. On dispose du théorème (5) donnant la famille d'opérateurs qui vérifie les deux propriétés d'invariances, et qui possède une formule explicite dans le domaine de Fourier sous la forme d'une composante à divergence nulle et d'une autre à rotationnel nul, donc d'une décomposition pondérée de Helmholtz, ce qui permet d'avoir également toute une famille de champs aléatoires résultants allant d'un champ à divergence nulle à un champ de rotationnel nul, et donc de créer des textures à orientation prescrite.

Généralisation aux champs vectoriels. Dans [20] Tafti et Unser travaillent toujours sur \mathbb{R}^d , mais généralisent davantage en considérant des Browniens à valeurs vectorielles satisfaisant :

$$\mathbb{E} [\|B_H(x) - B_H(y)\|^2] = 2\alpha' \|x - y\|^H$$

Pour construire un tel champ vectoriel on est amené à résoudre une équation du type :

$$UB_H = W$$

où W est un vecteur de champs vectoriels indépendants, centré et est un bruit blanc, et U - l'opérateur de « blanchissement » - est choisi de manière à vérifier les propriétés d'invariances qui nous intéressent (autosimilaire et invariant par rotation), et qui seront répercutées sur la solution B_H . U se trouve être une généralisation du Laplacien fractionnaire Δ^γ avec des paramètres supplémentaires que nous allons préciser, permettant de régler le caractère plus ou moins solénoïdal et irrotationnel de la solution.

Puisque l'on va travailler avec des processus aléatoires généralisés, l'inversion de $UB_H = W$ nécessite des arguments tirés de la théorie de l'analyse des distributions stochastiques développée par Gelfand et Valenkin dans [10].

Remarque : des travaux similaires ont été réalisés par Yaglom, mais en se limitant à une analyse de ces champs au second ordre, et on considèrerait séparément les processus aléatoires scalaires avec des incréments stationnaires d'ordre m . L'approche de Tafti et Unser présente l'avantage de réunir ces deux traitements et de ne pas se limiter au second ordre et donc de pouvoir considérer des bruits autres que gaussiens.

Opérateur vectoriel invariant par rotation et changement d'échelle.

Soit $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ un système de coordonnées sur lequel on définit un champ vectoriel $f(u)$. Soit $x = \phi(u)$ un autre système de coordonnées (où ϕ est un homéomorphisme). Alors :

$$f_\phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u) f(u)$$

En particulier pour une transformation linéaire $x = Mu$ où M est une matrice on a $f_M(x) = Mf(M^{-1}x)$ et si $M = \Omega$ est en particulier orthogonale $f_\Omega(x) = \Omega f(\Omega^T x)$ ou une homothétie $M = \sigma I$ alors $f_\sigma(x) = \sigma f(\sigma^{-1}x)$.

Une fois cette terminologie fixée, les propriétés d'invariances requises pour l'opérateur U sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Uf_\Omega &= (Uf)_\Omega & (\text{invariance par rotation}) & \hat{U}(\Omega\omega) = \Omega\hat{U}(\omega)\Omega^T \\ Uf_\sigma &= \sigma^{2\gamma}(Uf)_\sigma & (\text{homogénéité}) & \hat{U}(\sigma\omega) = \sigma^{2\gamma}\hat{U}(\omega) \end{aligned}$$

On dispose alors du théorème suivant :

Théorème d'Arigovindan. *Un opérateur U satisfaisant les deux propriétés d'invariances ci-dessus, peut se décomposer de la manière suivante en Fourier :*

$$\hat{\phi}_\xi^\gamma(\omega) = \|\omega\|^{2\gamma} \left[\xi_{irr} \frac{\omega\omega^T}{\|\omega\|^2} + \xi_{sol} \left(I - \frac{\omega\omega^T}{\|\omega\|^2} \right) \right] \quad (5)$$

c'est-à-dire en une composante à rotationnel nul et une composante à divergence nulle, c'est donc une décomposition de Helmholtz. Dorénavant on notera $(-\Delta)_\xi^\gamma$ l'opérateur U ayant cette expression en Fourier.

Inversion du Laplacien fractionnaire. Rappelons que nous souhaitons résoudre l'équation :

$$(-\Delta)_\xi^\gamma g = h$$

Cette équation est à prendre au sens de l'adjoint :

$$\langle (-\Delta)_\xi^\gamma g, f \rangle = \langle h, f \rangle \Leftrightarrow \langle g, (-\Delta)_\xi^{\gamma*} f \rangle = \langle h, f \rangle$$

avec f des fonctions tests à prendre dans un espace adéquat. Comme g et h n'appartiennent pas nécessairement au même espace il faut prendre éventuellement des fonctions tests dans des espaces différents.

Sans rentrer dans les détails, l'objectif de chercher un inverse qui satisfasse les propriétés d'invariances requises, se ramène à régulariser des intégrales singulières. Une fois cela fait, les auteurs sont en mesure de caractériser le modèle aléatoire dans le formalisme de Gelfand et Valenkin. Ils montrent que celui-ci n'est pas stationnaire mais possède des accroissements d'ordre n stationnaire et peut également être rendu stationnaire par le biais d'une analyse en ondelettes. Enfin ce modèle aléatoire a bien les caractéristiques statistiques voulues : autosimilarité et invariance par rotation, et présente des propriétés directionnelles allant effectivement de la divergence nulle au rotationnel nul suivant la pondération (ξ_{irr}, ξ_{sol}) et le choix de H .

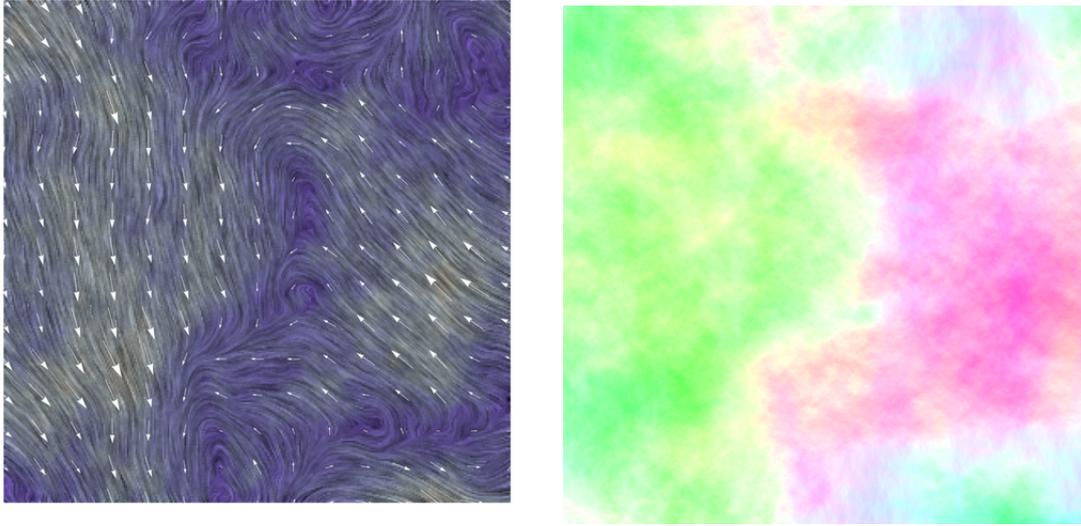


Figure 5 – Simulation du modèle d’Unser pour $H = 0.5$ et $\xi = (100, 0)$.
Figure tirée de la page de Tafti : <http://bigwww.epfl.ch/tafti/gal/vfBm/>

4 Simulations numériques du CBFA

Nous avons défini précédemment différents modèles de textures aléatoires. Dans l’optique de pouvoir y détecter ensuite l’anisotropie nous avons besoin de générer informatiquement ces textures. Cette section est consacrée à l’implémentation du modèle d’Estrade et Bonami en 2D, qui requiert la simulation de Browniens fractionnaires 1D.

4.1 Simulation d’un mBf 1D par matrices circulantes

Décrivons brièvement la méthode des matrices circulantes exposée dans [8]. Le programme Matlab que j’ai utilisé qui implémente cette méthode appartient à JF. Coeurjolly, qui a fait une étude comparative des méthodes dans [12].

On souhaite simuler un Brownien fractionnaire 1D d’ordre H noté $B_H(t)$. On va considérer le processus $Z_H(t) = (B_H(t + 1) - B_H(t))$ qui est un processus stationnaire appelé bruit blanc fractionnaire et, en notant $r_H(t) = \frac{1}{2}(|t + 1|^{2H} - |t|^{2H} - |t - 1|^{2H})$, la covariance est :

$$\text{Cov}(Z_H(t), Z_H(s)) = r_H(|t - s|)$$

Soit $l \geq 1$, le vecteur $(Z_H(0), \dots, Z_H(l - 1))$ est centré gaussien, de matrice de covariance notée $R_H(l) = (r_H(|i - j|))_{1 \leq i, j \leq l-1}$, qui est donc de Toeplitz. On peut intégrer $R_H(l)$ dans une matrice circulante de taille $2l$ notée $S_H(l) = \text{circ}(s_H(l))$ où $s_H(l) = (r_H(0), \dots, r_H(l - 1), r_H(l - 2), \dots, r_H(1))$. La propriété intéressante des matrices circulantes est qu’elles sont diagonalisables dans la base de Fourier discrète et que leurs valeurs propres sont données par la transformée de Fourier discrète de leur première ligne. Plus précisément :

$$S_H(l) = \frac{1}{2l} F_{2l} \text{diag}(F_{2l} s_H(l)) F_{2l}, \quad F_{2l} = (e^{\frac{i\pi jk}{l}})_{0 \leq j, k \leq 2l-1}$$

Ensuite plusieurs résultats sont établis :

1. Les entrées $F_{2l} s_H(l)$ sont positives, donc $S_H(l)$ est une matrice de covariance.

2. Si $\epsilon_{2l}^{(1)}$ et $\epsilon_{2l}^{(2)}$ sont des vecteurs indépendants de loi $\mathcal{N}(0, I_{2p})$ alors les vecteurs

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2l}} \Re \left(F_{2l} \text{diag}(F_{2l} s_H(l))^{1/2} (\epsilon_{2l}^{(1)} + i\epsilon_{2l}^{(2)}) \right) \\ Z^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2l}} \Im \left(F_{2l} \text{diag}(F_{2l} s_H(l))^{1/2} (\epsilon_{2l}^{(1)} + i\epsilon_{2l}^{(2)}) \right) \end{aligned}$$

ont pour loi $\mathcal{N}(0, S_H(l))$.

3. On a alors

$$(Z_H(0), \dots, Z_H(l-1)) = (Z_0^{(i)}, \dots, Z_{l-1}^{(i)}), \quad i = 1, 2$$

Enfin en utilisant l'accroissement stationnaire de B_H et le fait que $B_H(0) = 0$ on a

$$(B_H(k))_{-m \leq k \leq l-m} = \left(\sum_{j < k+m} Z_H(j) - \sum_{j < m} Z_H(j) \right)_{-m \leq k \leq l-m}$$

Cette méthode de simulation est très rapide en choisissant l une puissance de 2, sa complexité est en $O(l \log l)$ puisqu'elle utilise la FFT.

4.2 Simulation du modèle d'Estrade et Bonami par « bandes tournantes »

Biermé, Moisan et Richard ont proposé dans [2] une méthode dite à « bandes tournantes », pour simuler le modèle d'Estrade et Bonami [3]. Dans l'article d'Estrade et Bonami, les propriétés démontrées s'appuient sur le **variogramme** du champ aléatoire X défini par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^2, v_X(y) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(X(y) - X(0))^2 \right]$$

qui caractérise complètement un champ à accroissements stationnaires puisque il est facile de voir que la covariance s'exprime en fonction du variogramme :

$$\forall y, z \in \mathbb{R}^2, \text{Cov}(X(y), X(z)) = v_X(y) + v_X(z) - v_X(y - z)$$

Le modèle d'Estrade et Bonami considère la famille de champs à accroissements stationnaires $X(t) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{it \cdot \xi} - 1) f^{1/2}(\xi) d\xi$ et dont le variogramme est $v_X(x) = \int_{\mathbb{R}^2} |e^{ix \cdot \xi} - 1|^2 f(\xi) d\xi$. Le cas qui va nous intéresser est lorsque la densité a pour forme $f^{1/2}(\xi) = c(\arg \xi) \|\xi\|^{-2h(\arg \xi) - 2}$.

On pourrait très bien discrétiser l'intégrale pour simuler X , mais dans ces conditions on perdrait les propriétés statistiques du champ. L'idée va plutôt être de simuler des processus 1D sur les droites d'angle θ passant par l'origine (les bandes tournantes) puis de les superposer pour simuler le champ 2D. Ce qui motive ce procédé est la chose suivante : si on effectue un changement de variable en coordonnées polaires dans l'intégrale du variogramme on montre que :

$$v_X(x) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma(h(\theta)) c(\theta) |x \cdot u(\theta)|^{2h(\theta)} d\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

avec $\gamma(H) = \frac{\pi}{H\Gamma(2H) \sin(H\pi)}$ et $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Soit encore en posant $\tilde{v}_\theta(t) = \gamma(h(\theta)) c(\theta) |t|^{2h(\theta)}$

$$v_X(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tilde{v}_\theta(x \cdot u(\theta)) d\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Autrement dit, le variogramme 2D $v_X(x)$ s'obtient en faisant « tourner » et en sommant des variogrammes 1D $\tilde{v}_\theta(t)$. Par ailleurs il est clair que le variogramme d'un mBf 1D d'ordre H s'écrit $\forall t \in \mathbb{R}, w_H(t) = \frac{1}{2}|t|^{2H}$. Par conséquent à un facteur multiplicatif près les \tilde{v}_θ sont des mBf 1D d'ordre $h(\theta)$. Il est alors naturel de considérer le champ simulé suivant :

$$X_{\Theta, \Lambda}(x) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i \gamma(h(\theta_i)) c(\theta_i)} Y_i(x \cdot u(\theta_i))$$

où les Y_i sont n mBf indépendants d'ordre $h(\theta_i)$, qui a pour variogramme :

$$v_{\Theta, \Lambda}(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(h(\theta_i)) c(\theta_i) w_{h(\theta_i)}(x \cdot u(\theta_i))$$

Se pose alors 2 problèmes :

- Le choix de $\Theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\Lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui assure la convergence de $X_{\Theta, \Lambda}(x) \rightarrow X(x)$.
- La simulation des mBf 1D Y_i sur des points non équidistants.

Convergence. La preuve utilise la notion de **distance de Kolmogorov** définie par :

$$d_{Kol}(X_{\Theta, \Lambda}(x), X(x)) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{ \mathbb{P}(X_{\Theta, \Lambda}(x) \leq t) - \mathbb{P}(X(x) \leq t) \}$$

et lorsque $d_{Kol}(X_{\Theta, \Lambda}(x), X(x)) \rightarrow 0$ alors $X_{\Theta, \Lambda}(x) \rightarrow X(x)$ au sens des distributions.

On montre d'une part que

$$d_{Kol}(X_{\Theta, \Lambda}(x), X(x)) \leq \frac{|v_X(x) - v_{\Theta, \Lambda}(x)|}{v_X(x)}$$

et d'autre part qu'on peut toujours trouver Θ, Λ et un compact $T \subset \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in T, |v_X(x) - v_{\Theta, \Lambda}(x)| \leq C_T \epsilon_\Theta^{\min(2H, 1)}$$

où $H = \min_\theta h(\theta)$ et $\epsilon_\Theta = \max_{i=1 \dots n+1} (\theta_i - \theta_{i-1})$. Avec les $\lambda_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ et $\lambda_1 = \theta_2 - \theta_0$.

Simulation des Y_i . Imaginons que l'on veuille simuler $X_{\Theta, \Lambda}$ sur $[0, 1]^2$ que l'on discrétise en une grille régulière $r \times r$. Les points en lesquels on veut estimer X sont ainsi $x = \left(\frac{k_1}{r}, \frac{k_2}{r} \right)$ avec $0 \leq k_1, k_2 \leq r$. Choisissons les θ_i de sorte que $\tan(\theta_i) = \frac{p_i}{q_i}$ où $p_i \in \mathbb{Z}$ et $q_i \in \mathbb{N}$. Alors, compte tenu de l'autosimilarité du mBf Y_i , on a :

$$Y_i(x \cdot u(\theta_i)) = Y_i \left(\frac{k_1}{r} \cos(\theta_i) + \frac{k_2}{r} \sin(\theta_i) \right) = \left(\frac{\cos(\theta_i)}{r q_i} \right)^{h(\theta_i)} Y_i(k_1 q_i + k_2 p_i)$$

où les $k_1 q_i + k_2 p_i$ sont entiers. Donc on peut se ramener à une simulation équidistante des $Y_i(k)$ pour $0 \leq k \leq r(|p_i| + q_i)$, c'est-à-dire utiliser la méthode des matrices circulantes de la [Section 4.1](#).

Version naïve. On considère un échantillonnage régulier des bandes $\theta_i = \alpha_1 + \frac{i}{n}(\alpha_2 - \alpha_1)$ dans le quadrant défini par les angles α_1 et α_2 , une approximation rationnelle $\frac{p_i}{q_i}$ par fraction continue des $\tan(\theta_i)$, et enfin on simule les Y_i de longueur $r(|p_i| + q_i)$. Un problème, d'ordre

informatique cette fois, se pose lorsque cette longueur est trop grande, provoquant un dépassement de mémoire. Les auteurs ont proposé une méthode permettant de contrôler la taille des entiers p_i et q_i de façon à réduire la complexité, et ce grâce au recours à la programmation dynamique.

Versión améliorée. On considère l'ensemble des couples d'entiers (p_k, q_k) premiers entre eux, bornés en valeur absolue par un entier naturel N , et tel que l'angle associé $\tan(\theta_k) = \frac{p_k}{q_k}$ soit dans le quadrant considéré (α_1, α_2) :

$$\mathcal{V}_N = \left\{ (p, q) / -N \leq p \leq N, 1 \leq q \leq N, \text{PGCD}(p, q) = 1, \alpha_1 < \arctan\left(\frac{p}{q}\right) < \alpha_2 \right\}$$

que l'on trie préalablement suivant les θ_k croissant.

Remarque : en pratique les auteurs prennent $N = 1 + \lceil \frac{1}{\tan(\epsilon)} \rceil$, empiriquement assez grand.

L'idée va être de choisir parmi cet ensemble \mathcal{V}_N , s couples qui minimisent le coût total :

$$C(\Theta) = \sum_{k=1}^s C(r(|p_{i_k}| + q_{i_k}))$$

où $C(\ell)$ est le coût de l'algorithme de simulation d'un mBf 1D, qui est en $O(n \log n)$,

sous la contrainte d'erreur $\epsilon_\Theta \leq \epsilon$.

Pour cela fixons $0 \leq i \leq n + 1$ et considérons s indices supérieurs à i :

$$i_1 = i, i_2, \dots, i_s = n + 1$$

Le coût de ce sous-ensemble est noté c_i , et le coût de l'indice i est noté $e_i = C(r(|p_i| + q_i))$

On a alors la relation de récurrence suivante :

$$c_i = e_i + \min_{j > i, \theta_j \leq \theta_i + \epsilon} c_j$$

Le coût qui nous intéresse est c_0 . La programmation dynamique consiste à partir de la fin en posant $c_{n+1} = 0$, et à calculer les c_i à rebours, en notant à chaque fois k_i l'indice $j > i$ qui réalise le minimum. La séquence optimale i_1, \dots, i_s est telle que $i_1 = k_0, i_2 = k_{i_1}, \dots, i_s = k_{i_{s-1}}$

En sortie de l'algorithme on dispose donc de s couples $(p_{i_k}, q_{i_k})_{1 \leq k \leq s}$ et donc d'un ensemble $\Theta = (\theta_k)_{1 \leq k \leq s}$ de s angles $\theta_k = \arctan \frac{p_{i_k}}{q_{i_k}}$ qui minimisent le coût $C(\Theta)$ et telle que l'erreur commise est inférieure à ϵ .

J'ai programmé la recherche de ces couples optimums dans la fonction Matlab `chooseBand.m`, appelée par la fonction centrale `BonamiEstrade.m` qui, à partir de cet ensemble Θ de bandes, effectue la simulation $X_{\Theta, \Lambda}$.

Choix des paramètres d'anisotropie

Le choix de la fonction de Hurst directionnelle $h(\theta) = g(\theta)$ (avec $c(\theta) = C$ constant) introduit de l'anisotropie dans l'image. Les 7 types de fonctions considérés sont les suivants :

- **Type 1** : $g(\theta) = H$ constante
- **Type 2** : $g(\theta) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } \theta \in (\text{dir}_1, \text{dir}_2) \\ \mu_2 & \text{sinon} \end{cases}$
- **Type 3** : $g(\theta) = \begin{cases} \text{linéaire sur } [-\frac{\pi}{2}, \text{dir}_1] \rightarrow [\mu_2, \mu_1] \\ \text{linéaire sur } [\text{dir}_1, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [\mu_1, \mu_2] \end{cases}$
- **Type 4** : $g(\theta) = \begin{cases} r(\theta)\mu_1 + (1 - r(\theta))\mu_2 & \text{pour } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ g(-\theta) & \text{pour } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases}$ avec $r(\theta) = \frac{1}{2}[1 + \sin(2\theta + \frac{\pi}{2})]$
- **Type 5** : $g(\theta) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } \theta \in (\text{dir}_1 - \epsilon, \text{dir}_1 + \epsilon) \\ \mu_2 & \text{sinon} \end{cases}$
- **Type 6** : $g(\theta) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } \theta \in (\text{dir}_1 - \epsilon, \text{dir}_1 + \epsilon) \\ \mu_2 & \text{si } \theta \in (\text{dir}_2 - \epsilon, \text{dir}_2 + \epsilon) \\ H & \text{sinon} \end{cases}$
- **Type 7** : $g(\theta) = \text{linéaire sur } [\text{dir}_1, \text{dir}_2] \rightarrow [\mu_1, \mu_2]$

Simulation sous Matlab

Dans toutes les simulations qui vont suivre j'ai pris une image de taille $r = 255$ (le programme requiert une puissance de 2 moins un), le quadrant $(\alpha_1, \alpha_2) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et l'erreur $\epsilon = 0.03$. Puis l'utilisateur choisit la méthode utilisée (naïve ou optimale), le type de fonction g utilisé et les paramètres correspondants, regroupés dans la variable

$$\text{Param} = [\text{method}, \mu_1, \mu_2, \text{dir}_1, \text{dir}_2, H/C, \text{choiceG}]$$

On fait alors appel à la fonction principale :

$$[I, \text{Tab}] = \text{BonamiEstrade}(r, \alpha_1, \alpha_2, \epsilon, \text{Param})$$

qui génère dans un premier temps les bandes optimales en faisant appel à `chooseBands.m` de la manière suivante

$$[p, q] = \text{chooseBands}(r, \alpha_1, \alpha_2, \epsilon)$$

qui sont avec nos paramètres au nombre de 138 (voir en rouge ci-dessous) puis effectue la simulation par « bandes tournantes », et renvoie l'image I ainsi que Tab qui donne l'angle des bandes θ et le coefficient de Hurst attribué $h(\theta) = g(\theta)$.

Remarque : ces appels de fonctions sont transparents pour l'utilisateur utilisant l'interface graphique de ma Toolbox. Le fonctionnement de celle-ci est décrit en détail en annexe.

4.3 Résultats obtenus

Les [Figure 6](#),...,[Figure 12](#) représentent circulairement les 7 types de fonctions directionnelles $1 - h(\theta) = 1 - g(\theta)$ (de façon à avoir de grands « pics » pour des petites valeurs de $h(\theta)$), accompagnés d'une réalisation de texture.

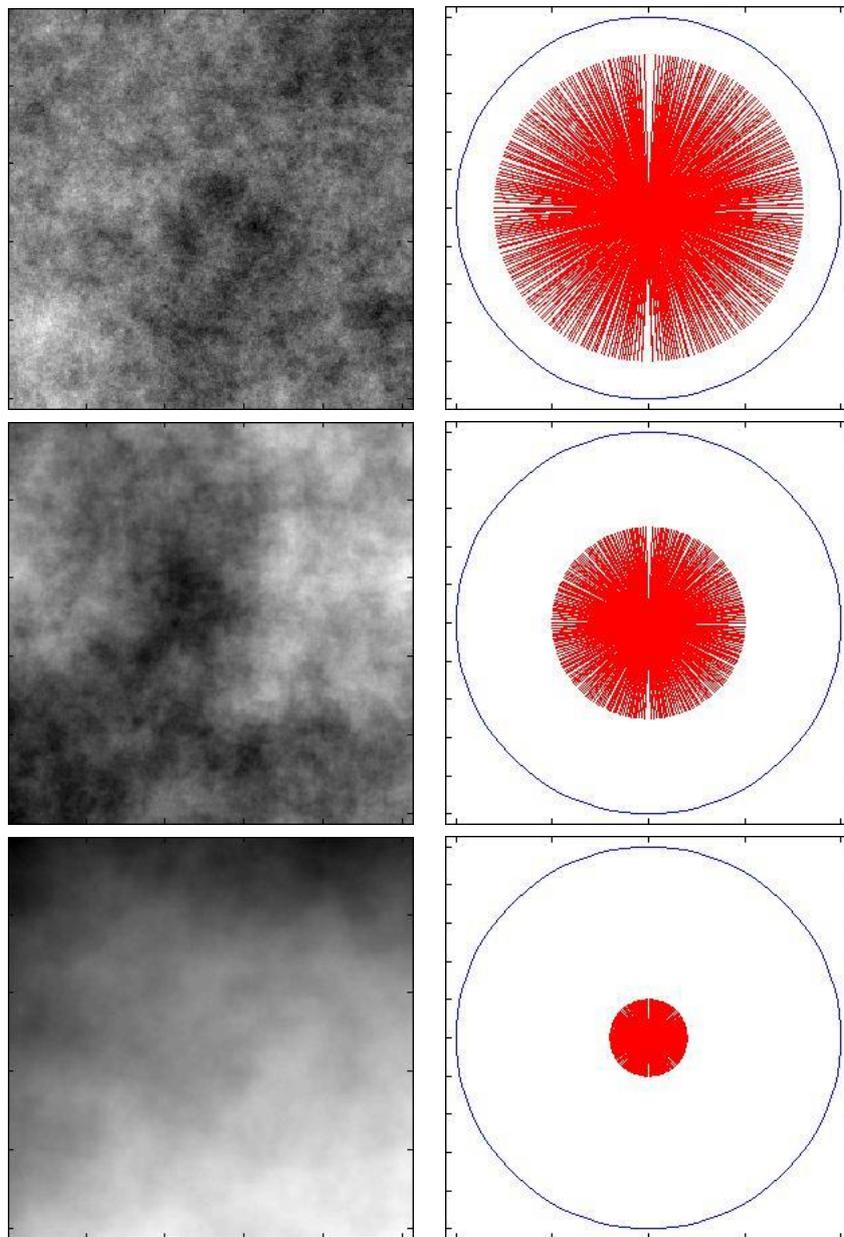


Figure 6 – Type 1. mBf pour $H = 0.2$, $H = 0.5$ et $H = 0.8$.
A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante

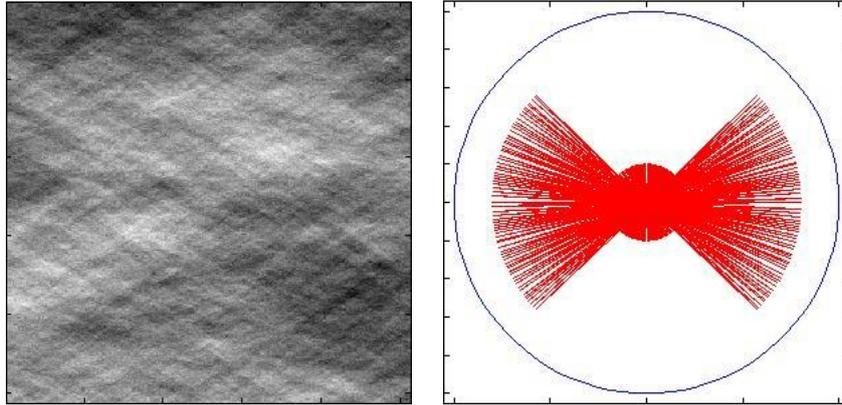


Figure 7 – Type 2. $(dir_1, dir_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$
 A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante

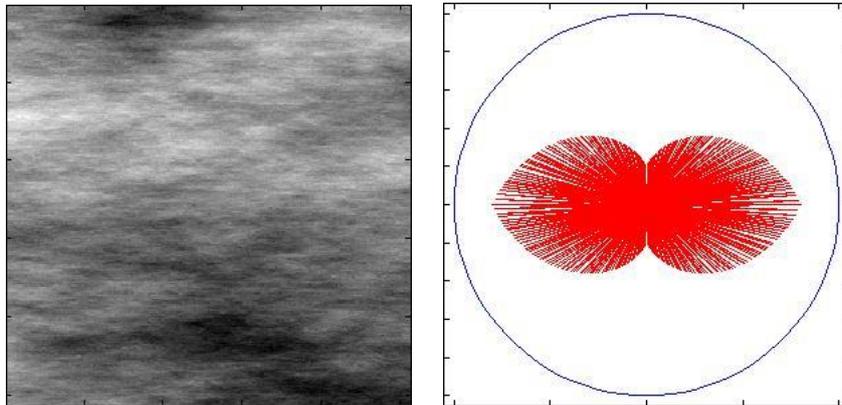


Figure 8 – Type 3. $dir_1 = 0$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$
 A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante

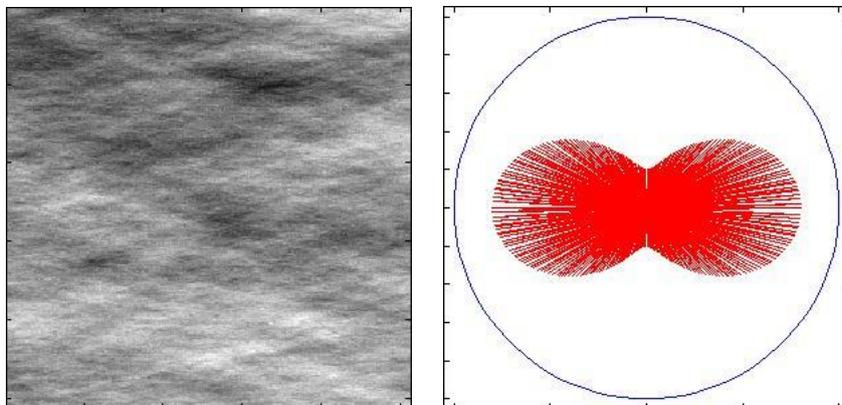


Figure 9 – Type 4. $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$
 A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante

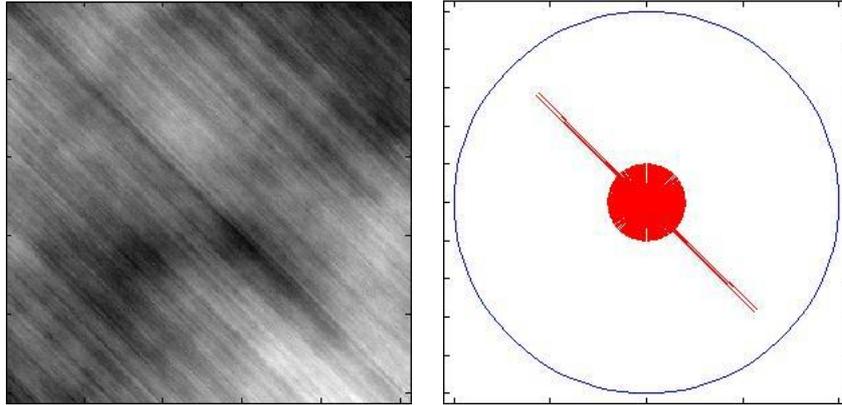


Figure 10 – Type 5. $\text{dir}_1 = -\frac{\pi}{4}$ et $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$
 A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante

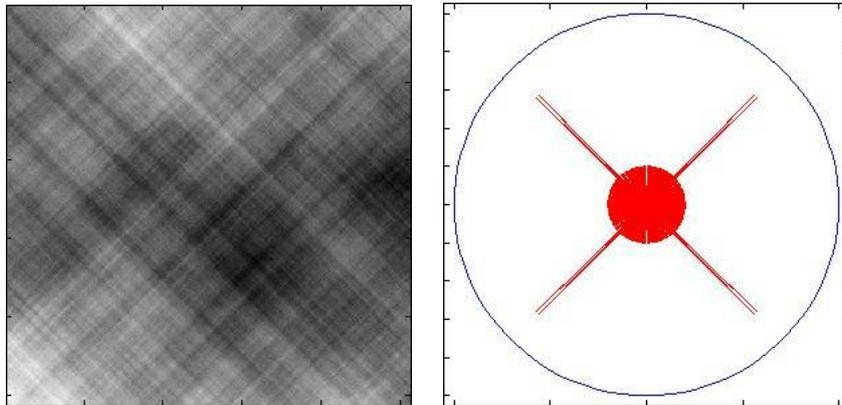


Figure 11 – Type 6. $(\text{dir}_1, \text{dir}_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.2)$ et $H = 0.8$
 A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante

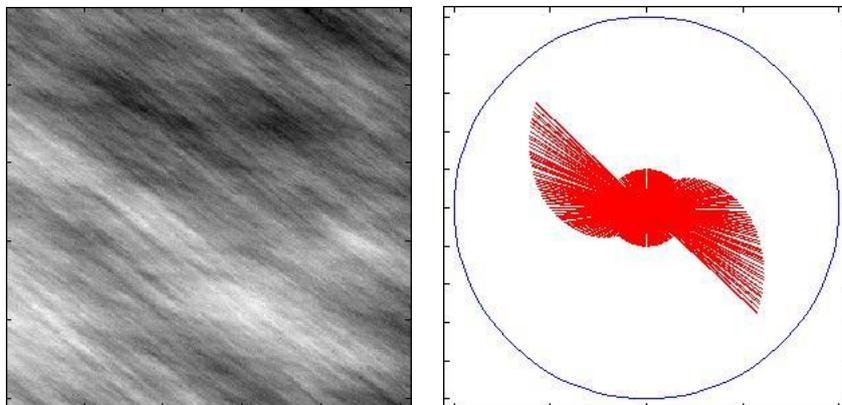


Figure 12 – Type 7. $(\text{dir}_1, \text{dir}_2) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.2, 0.8)$
 A droite fonction de Hurst directionnelle $g(\theta)$, à gauche texture correspondante

Analyse qualitative des résultats.

- **Figure 6** : nous avons simulé 3 mouvements Brownien fractionnaires 2D dont un mouvement Brownien classique pour $H = 0.5$ qui possède l'allure attendue. On constate bien que pour un coefficient petit $H = 0.2$ la texture est plus rugueuse, et pour un coefficient plus élevé $H = 0.8$ elle est plus lisse, ce qui est cohérent.
- **Figure 7** : on impose un h petit dans le quadrant $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ et il apparaît que la texture ondule suivant les directions incluses dans ce quadrant. On s'aperçoit donc que la fonction de Hurst directionnelle introduit bien de l'anisotropie, et pas n'importe comment.
- **Figure 8** : Utilisons maintenant une fonction discontinue au point $\theta = 0$ et faisons en sorte qu'elle soit linéaire de part et d'autre et ayant un coefficient de Hurst minimal (ici $\mu_1 = 0.2$) au point de discontinuité, ni plus ni moins une fonction triangle. On voit clairement l'orientation de direction $\theta = 0$.
- **Figure 9** : La discontinuité joue-t-elle un rôle important? Pour le savoir nous allons toujours utiliser une fonction symétrique admettant son minimum en $\theta = 0$ mais étant \mathcal{C}^∞ . On s'aperçoit que le caractère orienté vers $\theta = 0$ est amoindri, donc la réponse est oui.
- **Figure 10** : Traitons le cas extrême où la fonction $h(\theta)$ est faible (0.2) dans une seule direction $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et vaut 0.8 partout ailleurs. Dans ce cas la texture semble très orientée suivant cet angle.
- **Figure 11** : Si on procède de même avec deux orientations prescrites $\pm\frac{\pi}{4}$ alors on observe également les deux orientations dominantes formant une trame.
- **Figure 12** : Enfin si on fait varier linéairement le coefficient h de 0.2 à 0.8 entre deux directions $\pm\frac{\pi}{4}$, l'orientation dominante en $-\frac{\pi}{2}$ est toujours visible mais est moins bien délimitée, elle forme une sorte de dégradé.

Connaissant le modèle aléatoire de texture utilisé, il est possible de retrouver numériquement la fonction de Hurst directionnelle sur une ou plusieurs réalisations. En effet Bonami et Estrade ont montré que si l'on prenait une coupe d'orientation θ quelconque, son coefficient de Hurst était constant presque partout égal à $\inf_{\theta} h(\theta)$, et qu'il fallait passer par la transformée de Radon pour l'estimer réellement. J'ai donc développé l'outil « Analyse de profils » pour le mettre en évidence, dont le fonctionnement et les résultats sont donnés en annexe [Section 7.1](#).

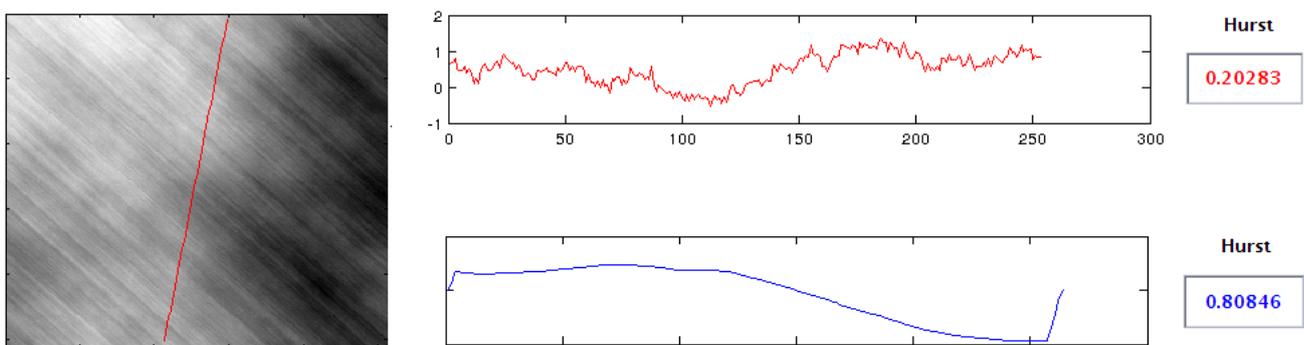


Figure 13 – Analyse de la régularité d'un profil d'orientation θ (en rouge) et de la transformée de Radon dans la direction θ

5 Détection de l'anisotropie

Motivation. Nous avons vu dans les diverses simulations du modèle d'Estrade et Bonami, que la « fonction de Hurst » directionnelle $h(\theta)$ permettait d'introduire de l'anisotropie dans l'image, et on perçoit visuellement les différentes orientations au sein de celle-ci. Le deuxième volet de ce stage consistait à relier l'anisotropie de l'image à l'orientation locale en chaque point, notion qui va être introduite grâce au signal monogénique.

5.1 Le signal monogénique

Pour bien comprendre en quoi le signal monogénique introduit par Felsberg [9] est pertinent pour rendre compte des orientations dans les images, commençons par traiter le cas du signal analytique qui est l'analogie en 1D.

5.1.1 Le signal analytique obtenu par la transformée d'Hilbert

En traitement du signal on a souvent à faire à des signaux qui sont modulés en amplitude ou en fréquence, c'est le cas typiquement pour la transmission de la voix (basse fréquence modulée par une porteuse). En électricité aussi on modélise les courants et les tensions par des grandeurs sinusoïdales variables dans le temps. Ces signaux sont de la forme $s(t) = a(t)\cos(\phi(t))$ avec $\phi(t) = \omega t + \theta_0$. On a souvent recours à une écriture complexe de tels signaux $\underline{s}(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$, qui nous permet entre autre de définir les notions d'impédances et de simplifier les calculs dans les circuits sans avoir besoin de résoudre des équations différentielles portant sur les signaux réels $s(t) = \Re[\underline{s}(t)]$. Bien que *in fine* on se ramène toujours à des signaux réels en physique, la notation complexe constitue un outil plus pratique à manipuler. Elle possède un autre avantage, celui de définir géométriquement la notion de phase, que l'on visualise dans le plan complexe sur la Figure 14 ci-dessous :

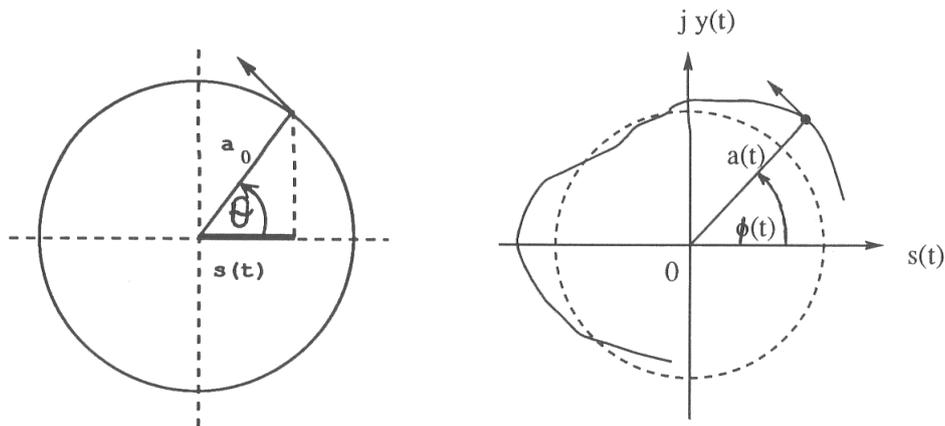


Figure 14 – Cosinus dont la phase varie (à gauche) et modulé également en amplitude (à droite)

On a vu que passer à la notation complexe consiste pour un cosinus de fréquence donnée à associer l'exponentielle complexe de même fréquence, c'est-à-dire :

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{-i2\pi f_0 t} + e^{i2\pi f_0 t}) \longrightarrow e^{i2\pi f_0 t}$$

On remarque que d'un point de vue spectral cela consiste à supprimer la fréquence négative et à multiplier par deux l'amplitude de la fréquence positive (pour conserver l'énergie).

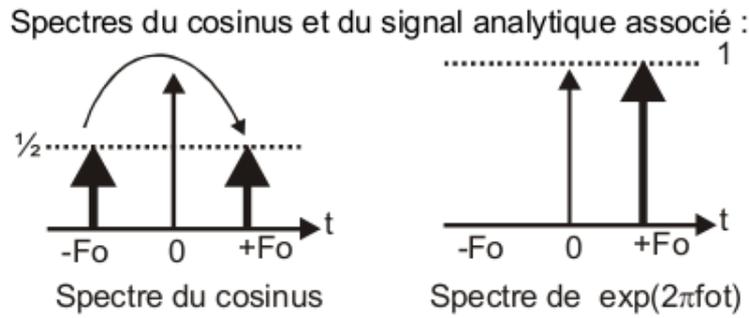


Figure 15 – Passage à la notation complexe d'un point de vue spectral

Pour un signal réel quelconque $s(t)$ qui n'a pas une forme simple comme précédemment, on aimerait également lui associer un signal complexe de manière unique qui permette de définir une amplitude et une phase. Comme on sait grâce à Fourier que tout signal est en réalité composé d'une multitude de sinusoides, il paraît naturel d'appliquer la méthode précédente à chacune de ses fréquences, ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition. Le signal analytique se définit dans le domaine de Fourier $\hat{s}_A(\omega)$ à partir du spectre $\hat{s}(\omega)$ en supprimant les fréquences négatives et en multipliant les amplitudes par 2 :

$$\begin{aligned}\hat{s}_A(\omega) &= \begin{cases} 2\hat{s}(\omega) & \text{si } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \\ &= \hat{s}(\omega) + \text{sgn}(\omega)\hat{s}(\omega)\end{aligned}$$

Pour déterminer son expression dans le domaine temporel il nous faut prendre la transformée de Fourier inverse de cette expression, donc il nous faut connaître celle de la fonction signe :

$$\begin{aligned}TF^{-1}(\text{sgn}(\omega))(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \text{sgn}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 -e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{it} e^{i\omega t} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{it} e^{i\omega t} \right]_0^{+\infty} \\ &= i \frac{1}{\pi t}\end{aligned}$$

Le produit $\text{sgn}(\omega)\hat{s}(\omega)$ devenant une convolution par transformée de Fourier inverse on obtient l'expression suivante de $s_A(\omega)$:

$$s_A(t) = s(t) + i \left(s(t) * \frac{1}{\pi t} \right) = s(t) + iT H[s](t)$$

qui fait intervenir la transformée de Hilbert, définie (en valeur principale de Cauchy) par :

$$TH[s](t) = \frac{1}{\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau$$

Remarque 1 : on a bien généralisé la méthode précédente car on montre que la transformée de Hilbert d'un cosinus est un sinus, autrement dit pour un cosinus on associe $\cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$.

Remarque 2 : on caractérise le signal d'« analytique » car il y a un lien fort avec les fonctions analytiques et holomorphes. Voir à ce propos la thèse [7] ou [9].

Une autre propriété de la transformée de Hilbert est qu'elle est en quadrature avec le signal d'origine, comme en témoigne la Figure 16 :

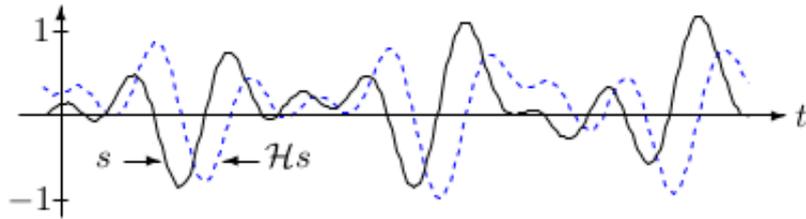


Figure 16 – $TH[s]$ et s sont en quadrature

ce qui permet de définir les notions de phase $\varphi(t)$ et d'amplitude $a(t)$ du signal analytique dans le repère orthonormé $(s, TH[s])$:

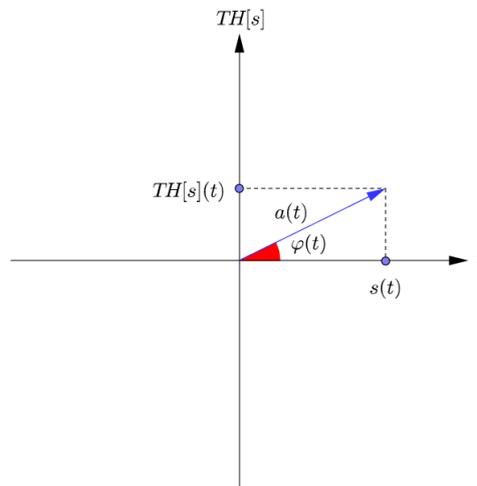


Figure 17 – Visualisation de la phase et de l'amplitude du signal analytique

L'amplitude $a(t)$ va en quelque sorte représenter l'enveloppe du signal, tandis que la phase $\varphi(t)$, et c'est le point intéressant, est porteuse d'information sur la structure locale du signal à savoir sa forme et son orientation.

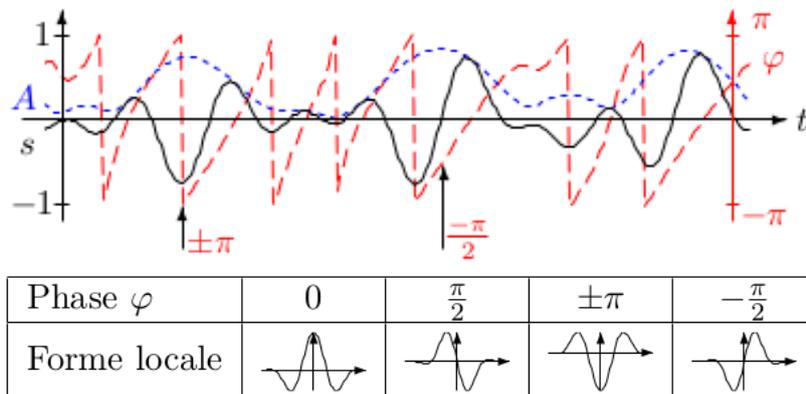


Figure 18 – Variations de l'amplitude et de la phase du signal analytique

On comprend alors l'intérêt de la généralisation de cette méthode à un signal 2D pour repérer dans une image les orientations des objets.

5.1.2 Le signal monogénique obtenu par la transformée de Riesz

Pour un signal 1D nous avons construit le signal analytique en supprimant les fréquences négatives du signal, donnant lieu à la transformée de Hilbert. Or en 2D, la notion de fréquence négative n'a pas de sens, c'est pourquoi la recherche d'un signal analytique pour les signaux 2D reste encore un problème ouvert. Différentes méthodes ont été proposées, en travaillant sur des quadrants du domaine de Fourier plan, on fait ainsi apparaître les notions de transformée de Hilbert totale et partielle [7]. Cependant ce type d'approches n'est valable que pour une certaine classe de signaux, et les notions de phases résultantes sont difficilement interprétables. Plus tard Bülow, dans sa thèse [5], définit le signal quaternionique, qui résout en partie les problèmes des méthodes précédentes mais dont les phases restent peu intuitives. Pour un bon résumé de l'historique de tous ces travaux voir le mémoire de Carré [6].

Récemment une autre approche plus orientée signal a vu le jour, il s'agit du signal monogénique, reposant sur la transformée de Riesz. L'idée est toujours de travailler en dimension supérieure comme nous l'avons fait par exemple dans le plan complexe pour un signal 1D, on fait ainsi apparaître la transformée de Hilbert sur une autre composante. On va alors faire de même pour un signal 2D en rajoutant deux composantes faisant intervenir la transformée de Riesz généralisant la transformée de Hilbert. Par analogie on obtient le signal monogénique $s_M(x)$:

$$\begin{aligned} (1D) \quad s_A(t) &= s(t) + iTH[s](t), t \in \mathbb{R} \\ (2D) \quad s_M(x) &= s(x) + iTR_1(x) + jTR_2(x), x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} TH[s](t) &= \frac{1}{\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau \xleftrightarrow{TF} -i \frac{\omega}{|\omega|} \hat{s}(\omega) \\ TR_1[s](x) &= \frac{1}{2\pi} v.p \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tau_1 s(x-\tau)}{\|\tau\|^3} d\tau \xleftrightarrow{TF} -i \frac{\omega_1}{|\omega|} \hat{s}(\omega) \\ TR_2[s](x) &= \frac{1}{2\pi} v.p \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tau_2 s(x-\tau)}{\|\tau\|^3} d\tau \xleftrightarrow{TF} -i \frac{\omega_2}{|\omega|} \hat{s}(\omega) \end{aligned} \right.$$

On réunit les deux composantes de la TR dans un complexe de manière à définir l'opérateur de Riesz qui possède les propriétés suivantes :

- (**Transformée de Riesz**) $TR[s](x) = TR_1[s](x) + iTR_2[s](x) \xleftrightarrow{TF} -i \frac{\omega_1 + i\omega_2}{\|\omega\|} \hat{s}(\omega)$
- (Invariance par translation et changement d'échelle) $TR[s(a \cdot + b)](x) = TR[s(\cdot)](ax + b)$
- (Invariance par rotation à un facteur près) $TR[s(R_\theta \cdot)](x) = e^{i\theta} TR[s(\cdot)](R_\theta x)$
- $s(x) = A \cos(\xi^T x)$ avec $\xi^T = \xi[\cos(\alpha), \sin(\alpha)]$, $TR[s](x) = A |\sin(\xi^T x)|$, $arg\{TR[s]\} = \alpha$
- $TR[s] = \nabla_{\mathbb{C}}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} s$ avec $\Delta^\alpha \xleftrightarrow{TF} \|\omega\|^{2\alpha}$ le Laplacien fractionnaire

On constate que cet opérateur transforme un cosinus 2D en un sinus, donc tout comme la transformée de Hilbert il déphase de $\frac{\pi}{2}$ le signal (donc dérive d'où le lien avec Δ^α) et s'opère de façon invariante à l'orientation du signal, ce qui fait de la transformée de Riesz une généralisation isotrope de la transformée de Hilbert.

À partir du signal analytique nous avons défini l'amplitude et la phase en nous plaçant en coordonnées polaires, ici nous allons faire de même en nous plaçant en coordonnées sphériques

$$(1D) \ s_A(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ TH[s](t) \end{bmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} = a(t) \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix}$$

$$(2D) \ s_M = \begin{bmatrix} s \\ TR_1[s] \\ TR_2[s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

On a comme précédemment une interprétation géométrique de ces angles : le module va être une mesure d'énergie locale permettant de mettre en évidence la présence d'information, θ met en évidence une notion de direction locale dominante de la surface, et enfin φ va porter une information géométrique similaire à celle décrite dans le cas du signal analytique.

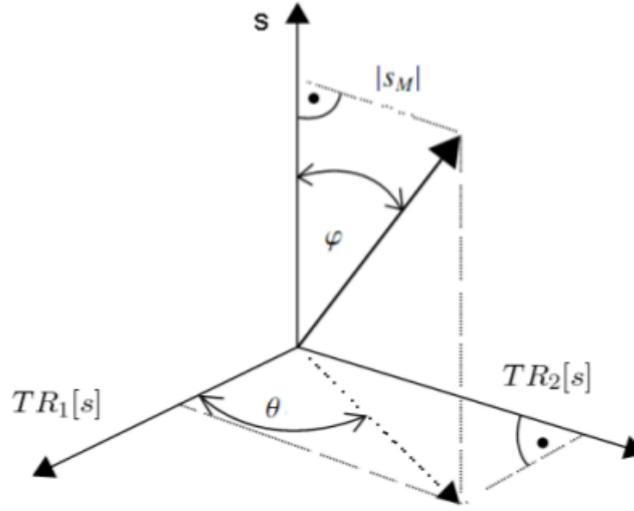


Figure 19 – Visualisation de la phase φ et de l'orientation θ du signal monogénique

Le signal monogénique se prête parfaitement, nous l'avons vu, à des sinusoides 2D (la transformée de Riesz ne fait que les déphaser) et les informations de phase et d'orientation prennent tout leur sens. Pour des signaux 2D quelconques, typiquement des images de textures qui contiennent à la fois des hautes et basses fréquences, il est nécessaire d'utiliser le monogénique sur différentes sous-bandes, c'est là qu'interviennent les ondelettes monogéniques.

5.2 Détermination des orientations par la transformée en ondelettes monogéniques

A partir d'une ondelette $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ admissible, c'est-à-dire telle que

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{|\xi|^2} d\xi < +\infty$$

on construit grâce aux opérateurs de translation T_b , de rotation R_α et de dilation D_a , une famille d'ondelettes $\psi_{a,\alpha,b} = T_b R_\alpha D_a \psi$, et les coefficients d'ondelettes s'obtiennent par

$$c_f(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi_{a,\alpha,b}(x)} dx$$

On montre alors que l'ondelette vectorielle $\psi^{(M)} = (\psi, TR_1[\psi], TR_2[\psi])$, reste admissible, et les coefficients en ondelettes monogéniques de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sont alors les vecteurs :

$$c_f^{(M)}(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi_{a,\alpha,b}^{(M)}(x)} dx$$

À ce stade, nous pouvons alors définir une transformée en ondelettes et calculer pour chaque coefficient obtenu (vecteur de Clifford) une notion de norme et de phase. Nous avons alors à disposition un outil permettant d'analyser pour différentes bandes de fréquences la présence d'information à travers le module, une direction locale dominante de la surface (l'angle θ) et enfin, l'angle φ va nous donner une information structurale.

Visualisation des orientations

Pour déterminer les orientations dans les textures précédemment générées, j'ai intégré à mon programme le fichier Matlab `mowv2.m`, programmé par mon collègue Thomas Oberlin, qui effectue une décomposition en ondelettes monogéniques continues, discrétisée. L'ondelette mère utilisée est l'ondelette complexe de Morlet.

Considérons une fonction d'anisotropie de type 5, ainsi la texture présente une orientation prédominante dans la direction $-\frac{\pi}{4}$, que l'on se propose de détecter.

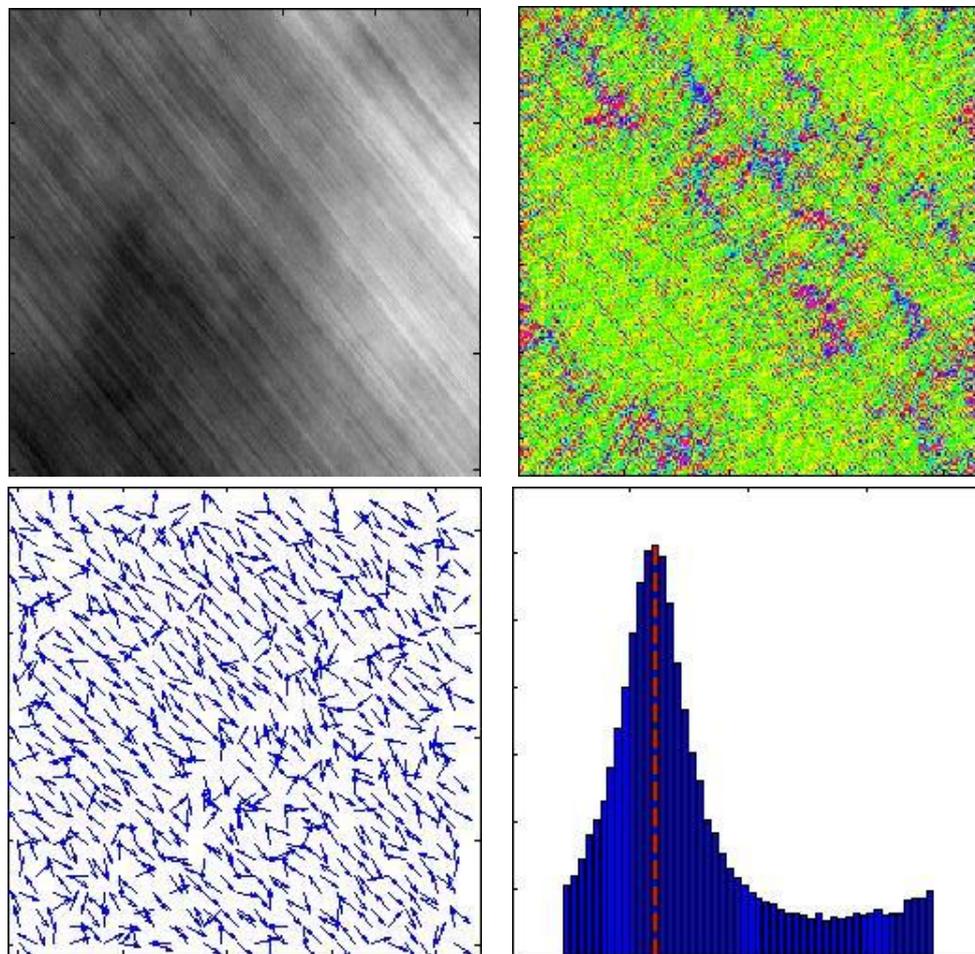


Figure 20 – Analyse des orientations à une échelle donnée. En haut à gauche : texture analysée, en bas à gauche : champ de vecteurs d'orientation, en haut à droite : colormap des angles d'orientation formés par les vecteurs, en bas à droite : histogramme des orientations sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Sur la [Figure 20](#) (obtenue en cliquant sur le bouton « Analyze orientation » de l'interface graphique comme expliqué en annexe [Section 7.1](#)) on s'est placé à l'échelle $k = 2$ de la décomposition en ondelettes de la texture (représentée en haut à gauche). En chaque point on en a extrait un vecteur d'orientation, nous en représentons une partie sur le graphe en bas à gauche. Les angles d'orientation formés par ces vecteurs sont ensuite calculés et visualisés grâce à une

colormap en haut à droite (la présence de vert presque partout indique une forte concentration d'angles autour de $-\frac{\pi}{4}$). Enfin en bas à droite est représenté l'histogramme de ces angles et la valeur maximale est repérée en rouge.

Remarquons que les vecteurs d'orientation sont globalement bien orientés comme semble l'être la texture, ce qui signifie que la transformée en ondelettes monogéniques semble bien adaptée pour détecter l'anisotropie sur ce type de texture. Comme les vecteurs ont même direction mais pas toujours même sens, le calcul des angles d'orientation est ramené sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Sur cet intervalle on voit clairement que l'histogramme présente un pic en $-\frac{\pi}{4}$ qui était l'angle pour lequel on avait imposé un coefficient de Hurst petit dans la simulation. Afin de mettre davantage en évidence la bonne détection de l'angle, on représente circulairement sur la [Figure 21](#) l'histogramme obtenu, à comparer avec la répartition de $1 - h(\theta)$ sur les bandes.

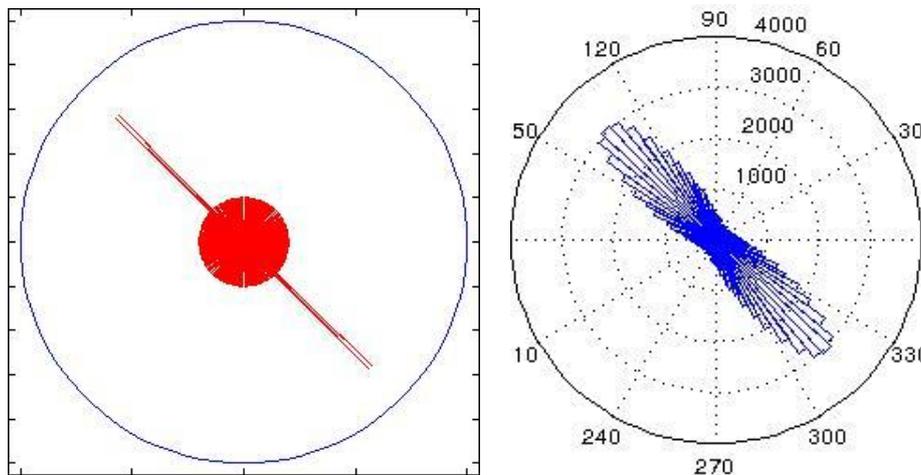


Figure 21 – Visualisation circulaire de l'histogramme théorique de la texture analysée [Figure 20](#) (à gauche) et empirique (à droite)

En faisant varier les échelles, on rend effectivement compte des orientations dans la texture à différentes « fréquences ». En théorie, comme ces textures sont principalement composées d'oscillations hautes fréquences, on devrait mieux discerner les orientations dans les échelles supérieures. Ce qui est bien le cas, pour k petit on se situe dans les hautes fréquences et on visualise bien les modes d'histogramme. Les champs d'orientation obtenus aux échelles $k > 30$, c'est-à-dire en basses fréquences, ne sont en général pas interprétables dus aux effets de bords. On se limitera donc par la suite à l'étude des 10 ou 20 premières échelles.

Pour les types 3 et 4 qui présentaient une orientation horizontale, on la repère également sur la [Figure 22](#), et on peut remarquer que le pic est effectivement plus étroit pour le type 3 présentant une discontinuité. On comprend alors l'importance de détecter non seulement la position du pic, mais également sa forme, pour être en mesure de quantifier le degré d'anisotropie.

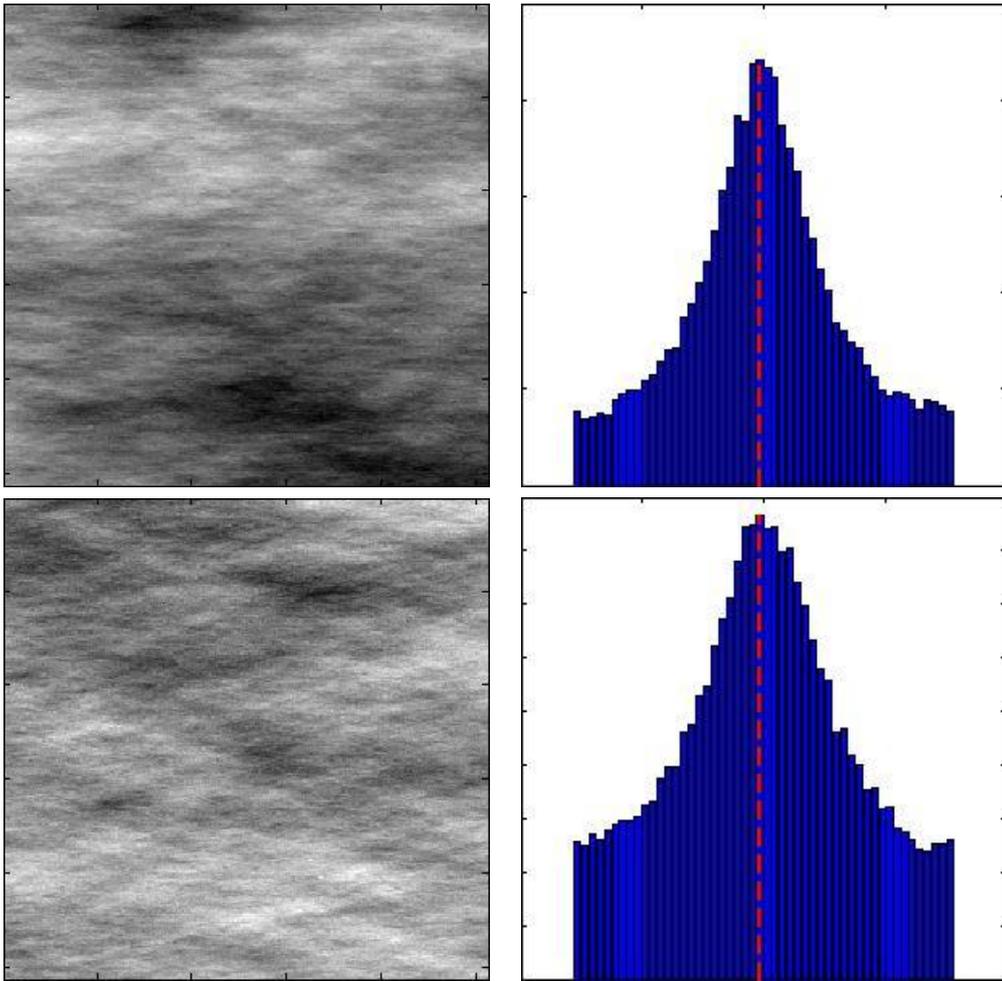


Figure 22 – Texture anisotrope et histogramme des orientations

Traitons le cas d'un mBf qui est par définition isotrope, et qui devrait donc posséder un histogramme d'orientation plat. C'est bien ce que l'on obtient comme l'atteste la [Figure 24](#)

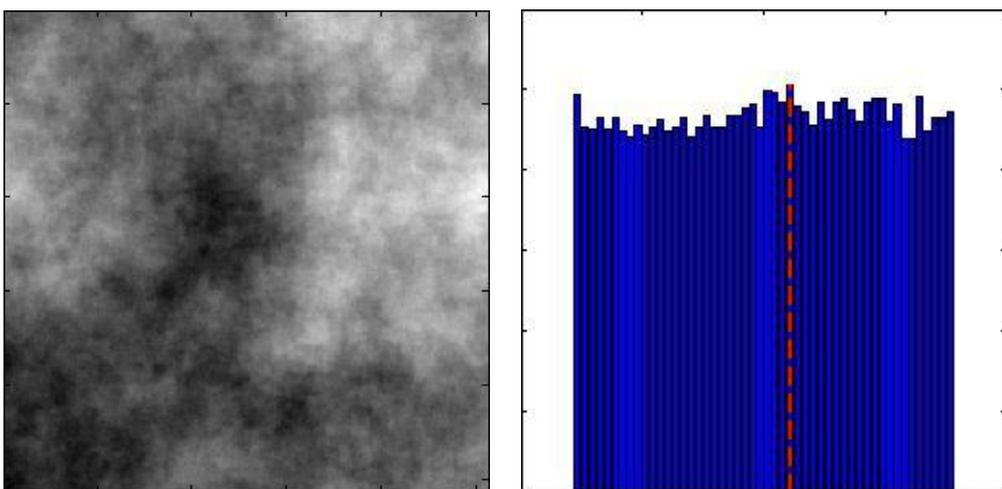


Figure 23 – Texture isotrope et histogramme des orientations plat

Traitons enfin le cas d'une double orientation (type 6), et visualisation l'historgramme correspondant :

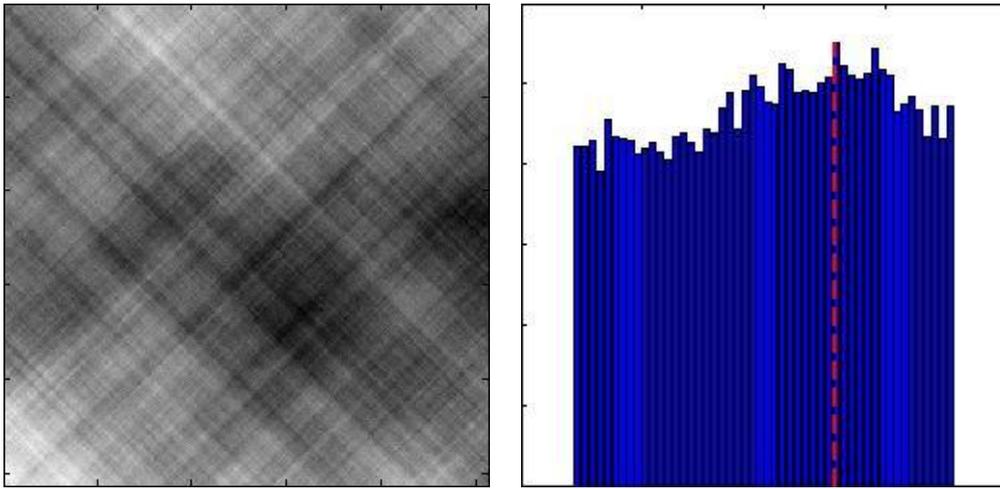


Figure 24 – Texture orientée dans 2 directions et histogramme correspondant

Limitations. On s’attendait à visualiser 2 pics en $\pm\frac{\pi}{4}$ mais il n’en est rien. Intuitivement si on se place localement en un point, celui-ci se trouve à l’intersection de 2 « lignes » de directions perpendiculaires, et donc le vecteur d’orientation calculé en ce point n’a aucune raison de s’aligner avec l’une ou l’autre des orientations. Ce qui explique pourquoi on obtient également un histogramme plat. Mathématiquement cela doit provenir du fait que l’ondelette de Morlet considérée est isotrope. Une des pistes envisageable pour traiter ces textures à orientations multiples serait de considérer des ondelettes orientées bidimensionnelles.

5.3 Analyse statistique des orientations

Motivation. Nous avons pu constater pour une réalisation donnée, de type 5, que les histogrammes présentent sur les premières échelles un pic témoignant d’une orientation prédominante dans la texture. A ce stade nous l’avons mis en évidence simplement en repérant le max dans l’histogramme, car nous avons connaissance de l’existence et de la forme de ce pic. Toutefois on voit sur la [Figure 24](#) que le max de cet histogramme pratiquement plat, ne nous renseigne aucunement sur une quelconque orientation prédominante, et donc que cette quantité ne nous permet pas de discriminer une texture isotrope d’une texture anisotrope. L’étape suivante consiste donc à déterminer une loi de probabilité dont la densité serait susceptible de représenter les distributions empiriques des orientations obtenues par histogramme.

Ma première idée fut d’essayer de « fitter » une gaussienne sur l’histogramme, caractérisée par sa moyenne μ et sa variance σ^2 , dans l’optique ensuite d’effectuer un test d’hypothèse sur la variance en guise de test d’anisotropie. Le problème est que l’on traite ici de données angulaires, dont la moyenne de l’échantillon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ne peut pas être calculée en effectuant simplement une moyenne des α_i . En effet considérons par exemple un ensemble de 3 angles : 10° , 30° et 350° ; la moyenne arithmétique est de 130° alors que l’échantillon semble dirigé vers 0° . Il est donc nécessaire de prendre en compte le caractère circulaire des données. La littérature suggère de se tourner vers la loi de Von Mises qui est l’analogie circulaire de la loi normale.

Loi de Von Mises. La loi de $VM(\mu, \kappa)$ est caractérisée par la densité de probabilité

$$\rho(\alpha; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp[\kappa \cos(\alpha - \mu)]$$

où I_0 est la fonction de Bessel d’ordre 0, μ la moyenne, et κ la concentration (variance⁻¹)

L'auteur de [1] a développé une ToolBox d'analyse de données circulaires pour Matlab, qui permet notamment d'estimer les paramètres μ et κ à partir d'un échantillon. La moyenne est calculée cette fois-ci par une moyenne de vecteurs unitaires $\vec{r}_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$ pour éviter le problème de la moyenne arithmétique cité précédemment. Le résultat obtenu fut cependant tout aussi décevant, et pour cause : les données dont nous disposons sont des angles dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puisque l'on s'intéresse uniquement aux orientations. Ainsi on aurait pu considérer n'importe quel intervalle de longueur π . D'ailleurs on voit bien que l'histogramme (et donc la densité) est π -périodique, la partie tronquée à gauche se retrouve complètement à droite.

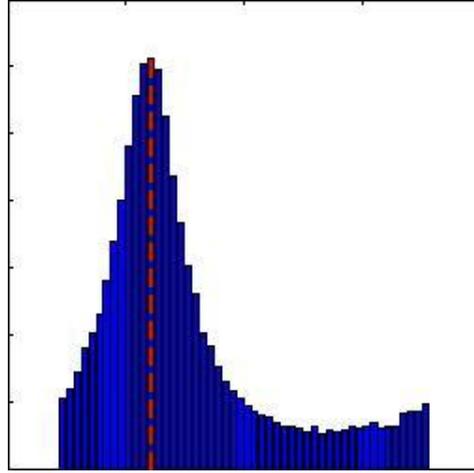


Figure 25 – Mise en évidence de la π -périodicité de la densité

Direction moyenne indéfinie. J'ai donc dans un premier temps démontré mathématiquement que dans le cas d'une densité π -périodique, la direction moyenne n'avait pas de sens. Pour cela notons R le vecteur aléatoire dont sont issues les réalisations $\vec{r}_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$. On peut noter $R = (\cos A, \sin A)$ où A est une variable aléatoire angulaire. On désigne par a et b les espérances $\mathbb{E}[\cos A]$ et $\mathbb{E}[\sin A]$. On définit alors la direction moyenne μ telle que :

$$\sqrt{a^2 + b^2} e^{i\mu} = a + ib$$

ce qui revient bien à faire une moyenne de vecteurs. Soit f la densité de la variable aléatoire A . Le fait que la direction moyenne soit en général différente de la moyenne arithmétique des angles s'écrit :

$$\mu \neq \int_0^{2\pi} \alpha f(\alpha) d\alpha$$

Démontrons alors la proposition suivante :

Proposition. Soit A une loi de probabilité sur le cercle telle que sa fonction de densité soit π -périodique :

$$\forall \alpha \in [0, 2\pi[, \quad f(\alpha + \pi) = f(\alpha)$$

alors la direction moyenne n'est pas définie, car $a = b = 0$.

Preuve : On découpe l'intégrale correspondant à $a = \mathbb{E}[\cos A]$ en 2 parties¹, on utilise la π -

périodicité² et un changement de variable³

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\cos A] &= \int_0^{2\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha \\
 &\stackrel{1}{=} \int_0^{\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha \\
 &\stackrel{2}{=} \int_0^{\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\alpha - \pi) f(\alpha - \pi) d\alpha \\
 &\stackrel{3}{=} \int_0^{\pi} \cos(\alpha) f(\alpha) d\alpha - \int_0^{\pi} \cos(\beta) f(\beta) d\beta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

On obtient de façon similaire $\mathbb{E}[\sin A] = 0$.

Autre piste de détection de l'orientation dominante. La direction moyenne n'a certes pas de sens pour notre échantillon, néanmoins l'histogramme de répartition des angles indique bel et bien un pic dont on aimerait détecter la position et mesurer le caractère plus ou moins « étroit ». L'idée est alors de ramener l'étude sur $[-\pi, \pi]$, donc sur le cercle entier, en symétrisant les données, ce qui a pour conséquence de créer un deuxième pic artificiel identique ; puis de travailler avec 2 lois de Von Mises de manière à les détecter tous les deux.

Loi de mélange de Von Mises-Fisher. La loi de probabilité $VMF(\alpha, \mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2)$ est caractérisée par la loi de densité de mélange suivante :

$$\rho(\alpha; \mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2) = \beta_1 \rho_1(\alpha; \mu_1, \kappa_1) + \beta_2 \rho_2(\alpha; \mu_2, \kappa_2)$$

où ρ_1 et ρ_2 sont des densités de loi de Von Mises classique, et $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

J'ai écrit un programme en R qui, pour chacun des histogrammes issus des 10 premières échelles, approxime une loi de mélange en estimant les paramètres $\mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2$, puis représente celle-ci sur l'histogramme. Pour plus de détails consulter l'annexe [Section 7.2](#). Le résultat obtenu sur l'histogramme « symétrisé » est le suivant :

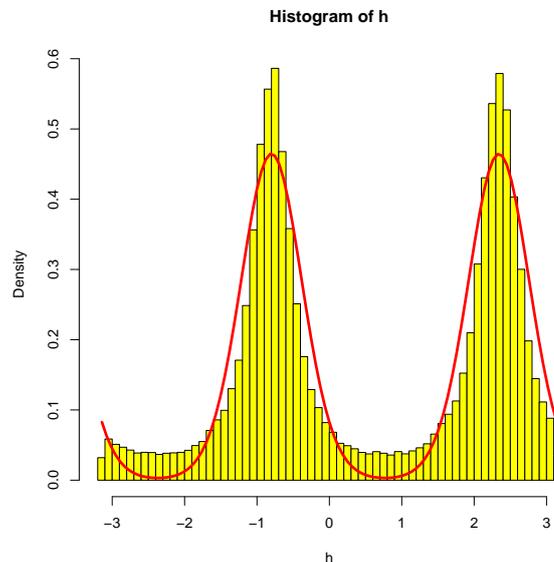


Figure 26 – Approximation d'une loi de mélange de Von Mises-Fisher sur l'histogramme empirique

Cette fois les pics sont bien détectés et correspondent à μ_1 et μ_2 . De part la symétrie artificielle créée, on obtient naturellement $\mu_1 + \pi \simeq \mu_2$, $\kappa_1 \simeq \kappa_2$ et $\beta_1 \simeq \beta_2 \simeq 0.5$. Pour être exact il aurait donc fallu minimiser sous contraintes d'égalités, ou autrement dit considérer la loi de mélange :

$$\rho(\alpha; \mu, \kappa) = \frac{1}{2}\rho_1(\mu + \pi, \kappa) + \frac{1}{2}\rho_2(\mu, \kappa)$$

et ré-écrire un programme de minimisation en déterminant au préalable sa fonction de vraisemblance. Mais les résultats numériques étant très satisfaisants, cette amélioration n'apparaissait pas comme étant une priorité. L'estimation des paramètres (μ_1, κ_1) (on ne conserve pas le couple (μ_2, κ_2) puisqu'ils sont liés) sur les 10 échelles permet alors de constater que l'orientation dominante est pratiquement constante, et que la moyenne obtenue (en rouge sur la [Figure 27](#)) correspond à la valeur exacte $-\frac{\pi}{4}$ à 10^{-2} près.

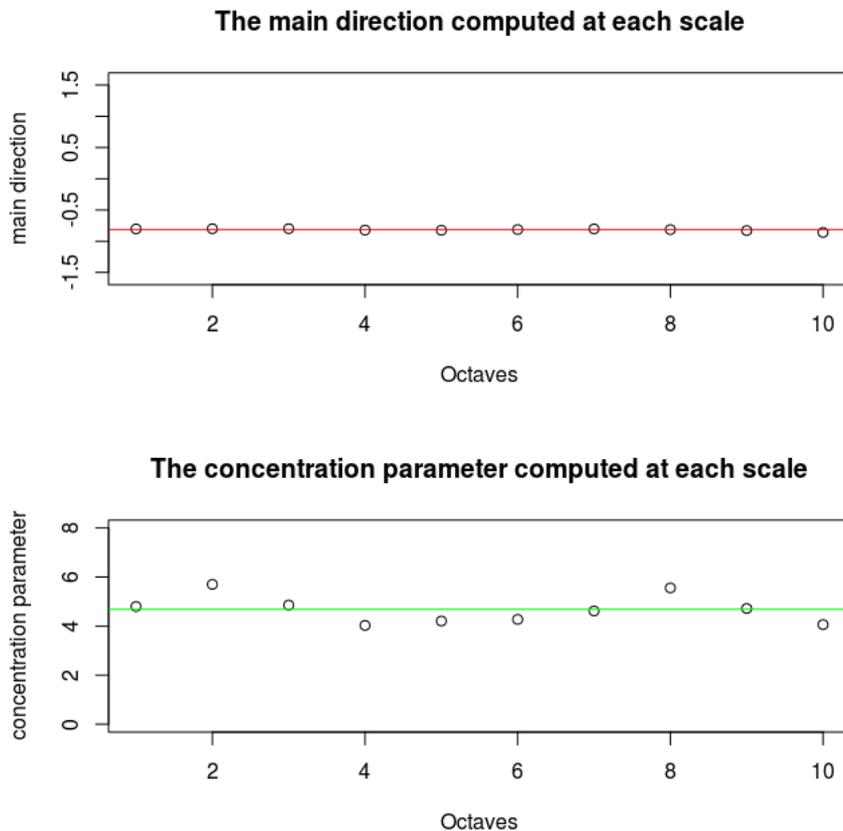


Figure 27 – Calcul de la direction moyenne et de la concentration sur 10 échelles

En revanche ce que l'on peut remarquer de plus gênant, est que contrairement à la moyenne μ , la variance $1/\kappa$ semble être mal capturée par loi de mélange. Pour savoir si une autre valeur de κ aurait permis de mieux approximer l'histogramme, autrement dit pour m'assurer que ce décalage ne provenait pas d'une erreur de ma part, j'ai tracé des valeurs de κ plus grandes à μ fixé :

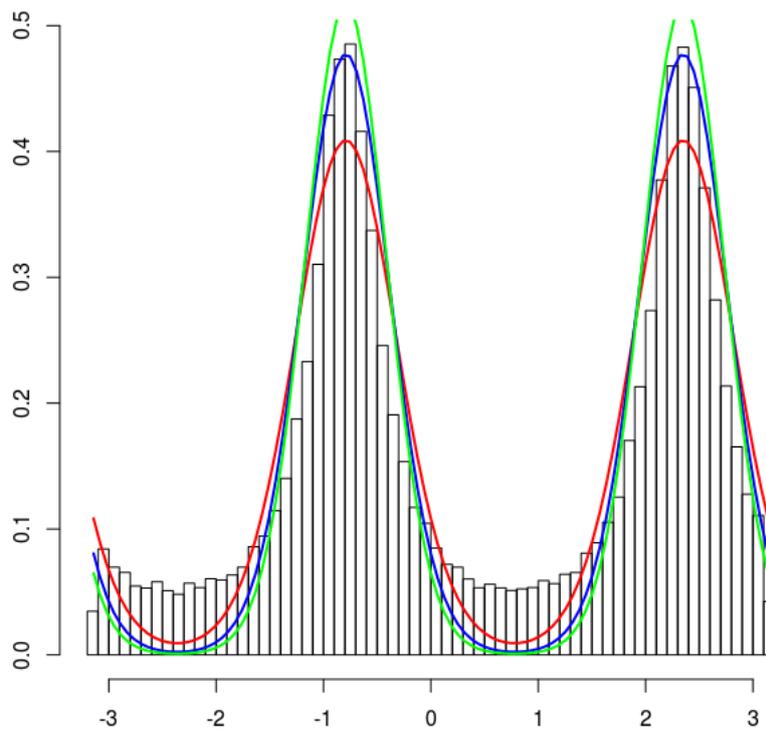


Figure 28 – $\kappa_{est} = 4.87$ (en rouge), $\kappa_2 = 6$ (en bleu) et $\kappa_3 = 7$ (en vert)

Limites du modèle. Certes la courbe verte semble mieux englober le pic, toutefois elle décroît très vite vers 0 et ignore donc la répartition des angles entre les pics. La minimisation fonctionne donc correctement et effectue un compromis entre l'approximation du pic et de la queue. On en conclut que les lois de Von Mises ne sont pas appropriées pour modéliser ces histogrammes car en tant que lois normales, celles-ci décroissent trop vite.

6 Conclusion et perspectives

Conclusion

Le sujet du stage a porté sur la modélisation et la caractérisation de textures anisotropes. Dans un premier temps j'ai étudié différents modèles de textures aléatoires basés sur le Brownien fractionnaire. Puis j'ai considéré plus spécifiquement le modèle du champ Brownien fractionnaire anisotrope de Bonami et Estrade, et les manières de le simuler : j'ai développé dans cette optique une interface graphique permettant de modifier les paramètres du modèle et de visualiser plus simplement les résultats. Les simulations ont alors mis en évidence l'anisotropie du modèle soumis à différentes orientations prescrites. Dans un deuxième temps j'ai développé des premiers outils pour caractériser l'anisotropie des textures simulées : la transformée en ondelettes monogéniques permet non seulement de décomposer une texture en sous-bandes fréquentielles, mais également d'extraire sur chacune d'elles une information d'orientation en tout point. Enfin j'ai effectué une analyse statistique des histogrammes d'orientations obtenus sur chacune des bandes, présentant un mode c'est-à-dire une orientation dominante. L'analyse se base sur les lois de von Mises-Fisher, dont j'estime les paramètres par minimisation. Les densités résultantes approximent bien les histogrammes par la moyenne, autrement dit on détecte bien l'orientation dominante, en revanche la variance ne correspond pas à celle des histogrammes dont les pics n'affichent pas une décroissance exponentielle. Le modèle de loi normale circulaire n'est ainsi pas tout à fait adapté à ces données et ne permet donc pas pour le moment d'effectuer des statistiques inférentielles plus poussées. Par ailleurs les textures à orientations multiples ne sont pas encore traitées car l'analyse par l'ondelette de Morlet ne permet pas localement d'exhiber plusieurs orientations.

Perspectives

A ce stade nous sommes capables, sur une texture présentant une orientation dominante, de la détecter en analysant statistiquement grâce aux lois de Von Mises-Fisher, les histogrammes d'orientation recueillis via la transformée en ondelettes monogéniques. Pour régler les problèmes de capture de la variance on pourrait s'intéresser à des lois de probabilité dont la densité est dite à « queue lourde », susceptibles de mieux approximer les histogrammes dont nous disposons, et ainsi de nous permettre d'effectuer des tests d'hypothèses qui nous renseigneraient sur la présence d'anisotropie ou non. Avant d'avoir recours à ces méthodes, il serait judicieux de prendre le problème en amont, c'est-à-dire de se concentrer dans un premier temps sur la détection des orientations en travaillant sur d'autres types de décomposition en ondelettes, qui seraient à même de contrecarrer les limites de l'ondelette de Morlet, et donc éventuellement de régler à la fois le problème multidirectionnel et d'obtenir des histogrammes plus exploitables statistiquement.

7 Annexes

Du point de vue de l'implémentation, l'architecture est détaillée dans le fichier `README.txt`. Quant au code proprement dit, il est relativement bien commenté et les en-têtes de fonctions permettent à l'utilisateur de pouvoir comprendre et tester les fonctions en dehors de l'interface graphique.

7.1 Fonctionnement de la Toolbox

Le programme `BonamiEstradeSimulation.m` et son interface graphique `.fig` associée regroupe à la fois le volet de simulation et celui d'analyse de l'anisotropie. Ouvrez Matlab, placez vous dans le dossier contenant ce fichier, puis lancez le en tapant simplement :

```
BonamiEstradeSimulation;
```

La fenêtre suivante s'ouvre alors. Illustrons son fonctionnement en détaillant les zones modifiables par l'utilisateur :

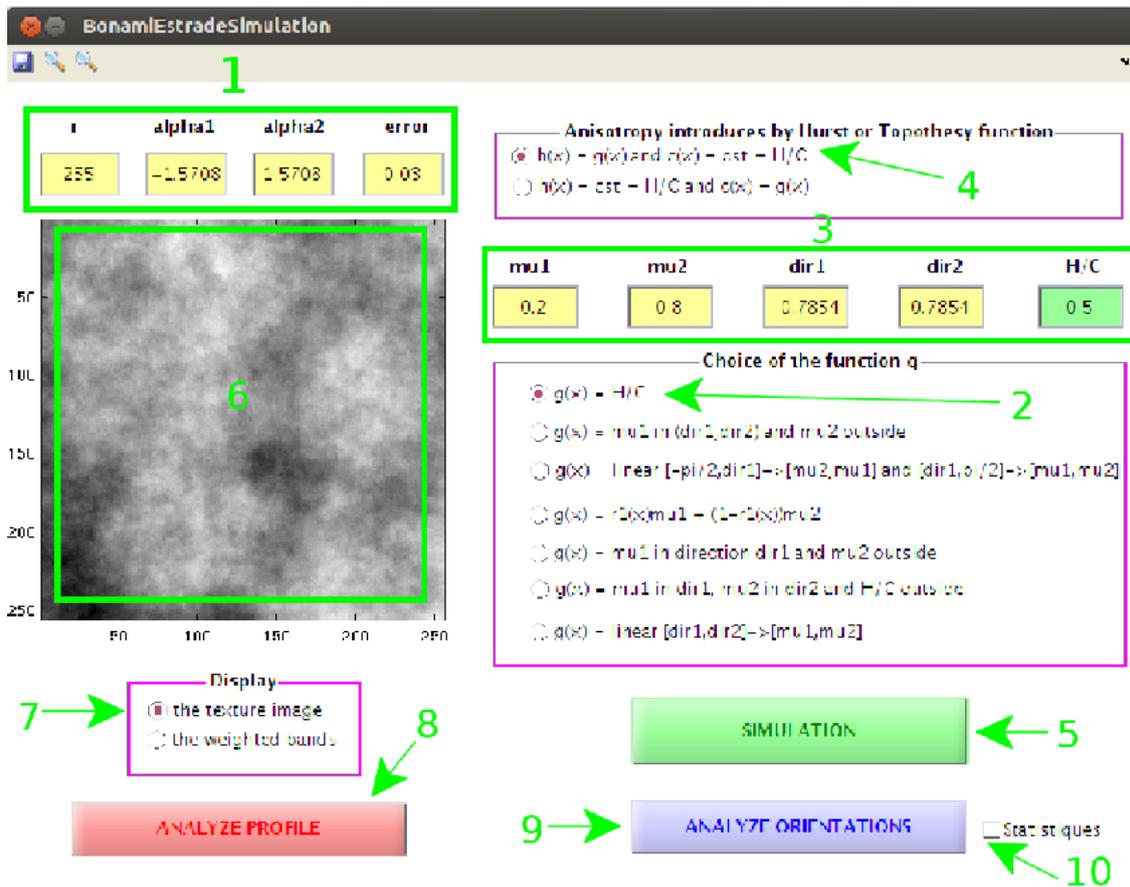


Figure 29 – Zones de la Toolbox

- **Zone 1** : Choix des paramètres principaux r (taille de l'image), (α_1, α_2) (quadrant utilisé) et ϵ (erreur d'approximation). Ces paramètres sont ensuite passés en arguments à la fonction `chooseBands.m` qui se charge de calculer les bandes optimales.
- **Zone 2** : Choix de la fonction d'anisotropie $g(\theta)$ parmi les 7 types décrits dans la [Section 4.3](#)
- **Zone 3** : Choix des paramètres associés au type de fonction choisi. Les cases à renseigner sont celles qui apparaissent en vert.

- **Zone 4** : Choix de faire porter l'anisotropie sur la fonction de Hurst directionnelle $h(\theta)$ ou sur la fonction de toposité $c(\theta)$.
- **Zone 5** : Bouton pour (re)lancer la simulation et obtenir une nouvelle réalisation du champ aléatoire précédemment défini.
- **Zone 6** : Visualisation de la réalisation de texture.
- **Zone 7** : Choix de visualiser la texture ou les bandes de longueur $1 - h(\theta)$
- **Zone 8** : Lance dans une nouvelle fenêtre l'analyse de profils de la texture.
- **Zone 9** : Lance dans une nouvelle fenêtre l'analyse des orientations de la texture.
- **Zone 10** : Si la checkbox « Statistiques » est cochée, le programme enregistrera les vecteurs d'orientation et les histogrammes correspondants dans des fichiers `.out` et `.his`, à l'intérieur du dossier `Stats`, pour une analyse future avec R.

Remarque : le bouton de sauvegarde situé dans la barre d'outils en haut à gauche, permet de sauvegarder l'image affichée en zone 6, dans le répertoire `Image`. Quant aux loupes elles permettent de zoomer sur la texture. Ces outils sont disponibles dans les autres fenêtres d'analyse.

Analyse des profils. En cliquant sur le bouton de la zone 8 la fenêtre suivante s'ouvre :

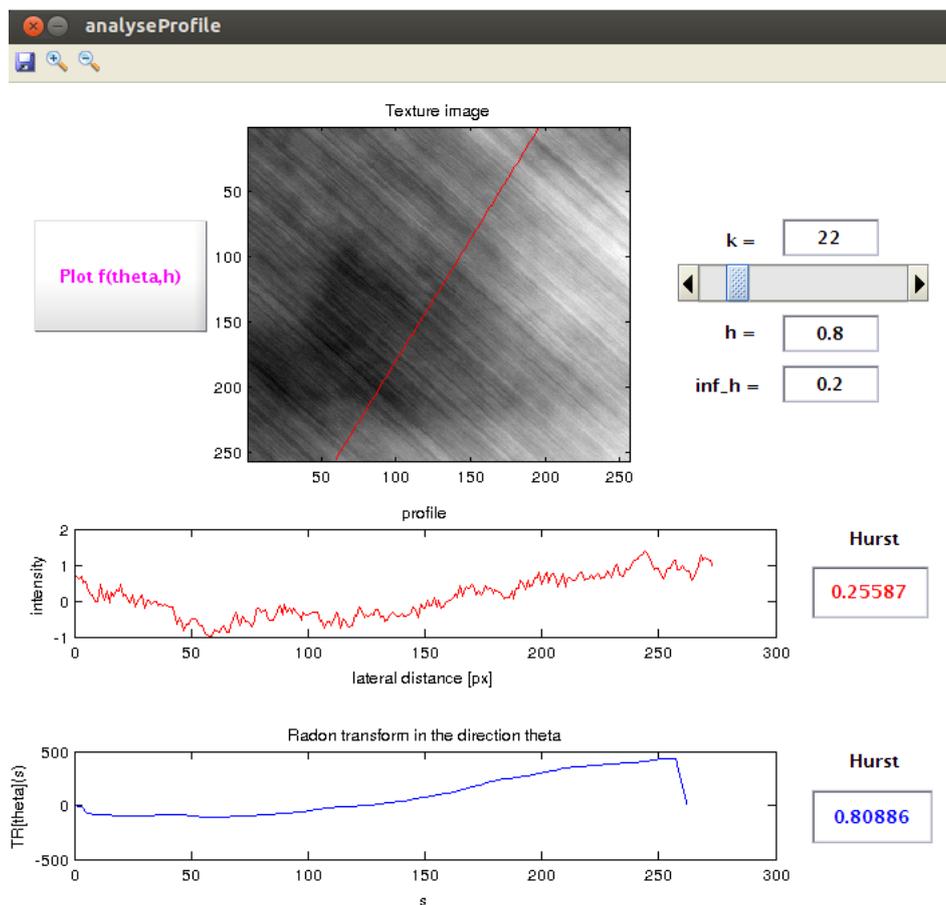


Figure 30 – ToolBox d'analyse des orientations

Le curseur permet d'effectuer une coupe d'angle θ_k , en dessous s'affiche $h(\theta_k)$ et le minimum de tous les $h(\theta_i)$. La courbe en rouge permet de visualiser la coupe effectuée (appelée aussi le

profil), et la courbe en bleu est la transformée de Radon à fenêtre suivant la direction θ_k . Pour chacune d'elles, on affiche son coefficient de Hurst, estimé par la routine Matlab `Vapko1ST.m` de JF. Coeurjolly. Le bouton $f(\theta, h_{est})$ permet de représenter la fonction $h_{est}(\theta)$ des coefficients de Hurst estimés sur chacune des directions.

Analyse des orientations. En cliquant sur le bouton zone 9 la fenêtre suivante s'ouvre :

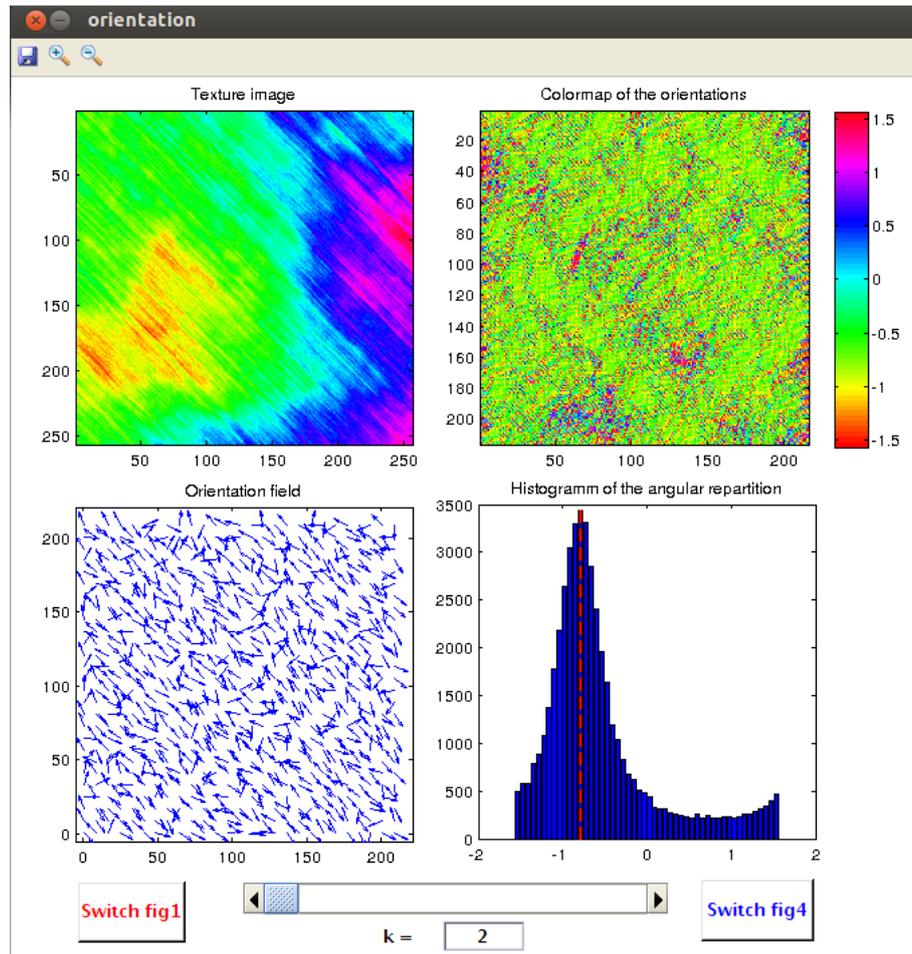


Figure 31 – ToolBox d'analyse des orientations

En haut à gauche est représentée la texture d'origine (en fausses couleurs), en haut à droite la colormap des angles d'orientation, en bas à gauche les vecteurs d'orientation et en bas à droite l'histogramme des angles d'orientations. Les boutons « Switch » permettent de visualiser les bandes et l'histogramme en mode circulaire. Enfin le curseur permet d'effectuer ces analyses à différentes échelles.

7.2 Fonctionnement des fichiers R d'analyse statistique

Lorsque la checkbox « Statistiques » (zone 10) est cochée et l'analyse d'orientation est lancée (zone 9), les fichiers de données d'orientation sont sauvegardés dans le dossier **Stats**. Pour les analyser avec R, ouvrez un terminal, placez vous dans ce dossier, lancez R et le programme `statOrientationMain.R` comme suit :

```
R;
> source('statOrientationMain.R')
> res = statOrientationMain();
```

Ceci vous générera en parallèle dans le dossier **Stats** les histogrammes empiriques et les densités estimées en fichiers **.pdf** pour chaque échelle.

Remarque : ces analyses s'appuient sur les packages **movMF** et **CircStats** de R.

Références

- [1] Philipp Berens. Circstat : a matlab toolbox for circular statistics. *Journal of Statistical Software*, 31(10) :1–21, 2009. *Cité page 42*
- [2] Hermine Biermé, Lionel Moisan, Frédéric Richard, et al. A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional brownian fields. 2012. *Cité page 25*
- [3] Aline Bonami and Anne Estrade. Anisotropic analysis of some gaussian models. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 9(3) :215–236, 2003. *3 citations pages 4, 20 et 25*
- [4] Antoni Buades, Triet M Le, J-M Morel, and Luminita A Vese. Fast cartoon+ texture image filters. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 19(8) :1978–1986, 2010. *Cité page 10*
- [5] Thomas Bülow. *Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images*. PhD thesis, Inst. für Informatik und Praktische Mathematik, 1999. *Cité page 36*
- [6] Philippe Carré. *Construction et analyse de transformées discrètes en ondelettes : spécificité de l'image et de la couleur*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2011. *Cité page 36*
- [7] B De Knock. *Multidimensional distributions and generalized Hilbert transforms in Clifford analysis*. PhD thesis, Ghent University, 2008. *2 citations pages 35 et 36*
- [8] CR Dietrich and Garry Neil Newsam. Fast and exact simulation of stationary gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(4) :1088–1107, 1997. *Cité page 24*
- [9] Michael Felsberg and Gerald Sommer. The monogenic signal. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 49(12) :3136–3144, 2001. *2 citations pages 33 et 35*
- [10] Izrail Moiseevič Gel fand and N Ya Vilenkin. *Generalized functions. Vol. 4, Applications of harmonic analysis*. Academic Press, 1964. *5 citations pages 10, 11, 14, 16 et 22*
- [11] Yann Gousseau and Jean-Michel Morel. Are natural images of bounded variation? *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33(3) :634–648, 2001. *Cité page 10*
- [12] Coeurjolly Jean-Francois. Simulation and identification of the fractional brownian motion : Abibliographical and comparative study. *Journal of statistical software*, 5 :1–53, 2000. *Cité page 24*
- [13] Jean-Pierre Kahane. *Some random series of functions*, volume 5. Cambridge University Press, 1993. *2 citations pages 10 et 13*
- [14] Jean-Pierre Kahane. Le mouvement brownien. *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XIXe Siècle*, 1996. *Cité page 10*
- [15] Xiaolong Li. *Etude du processus de Mumford*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2006. *Cité page 10*
- [16] David Mumford and Basilis Gidas. Stochastic models for generic images. *Quarterly of applied mathematics*, 59(1) :85–112, 2001. *Cité page 10*
- [17] David Nualart Rodón. *The Malliavin calculus and related topics*. 2006. *2 citations pages 14 et 15*

- [18] Frédéric Richard and Hermine Bierme. Statistical tests of anisotropy for fractional brownian textures. application to full-field digital mammography. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 36(3) :227–240, 2010. 2 citations pages 20 et 22
- [19] Gennady Samorodnitsky and Murad S Taqqu. Stable non-gauss/an random processes. *Econometric Theory*, 13 :133–142, 1997. Cité page 18
- [20] Pouya Dehghani Tafti and Michael Unser. Fractional brownian vector fields. *Multiscale modeling & simulation*, 8(5) :1645–1670, 2010. Cité page 22
- [21] Murad S Taqqu. Fractional brownian motion and long-range dependence. *Theory and applications of long-range dependence*, pages 5–38, 2003. Cité page 18