Les ondelettes monogéniques

Kévin Polisano

A partir d'articles de M. Unser, P. Carre, R. Soulard

25 janvier 2012

Contents

Signal analytique en 1D

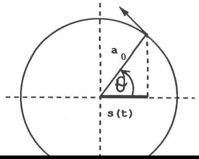
Notion d'amplitude, de phase et fréquence instantanée

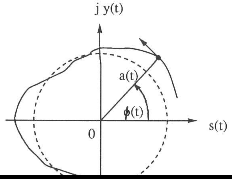
Expression d'un signal réel simple

- $s(t) = a(t)cos(\phi(t))$ avec $\phi(t) = \omega t + \theta_0$
- Ex : transmission de la voix, courants et tension, etc.

Fréquence instantanée

- $\underline{s}(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$, $s(t) = \Re[\underline{s}(t)]$
- Fréquence instantanée $\frac{d\phi}{dt}$



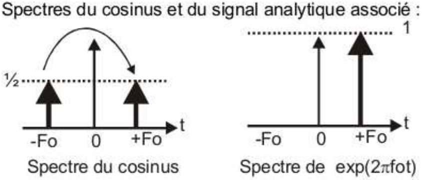


Signal analytique en 1D

Généralisation de la méthode

Signal analytique associé au signal réel

- $\cos(2\pi f_0 t) \longrightarrow e^{i2\pi f_0 t}$
- $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{-i2\pi f_0 t} + e^{i2\pi f_0 t})$
- $s(t) \longrightarrow ???$



Signal analytique en 1D

Généralisation de la méthode

Signal analytique associé au signal réel

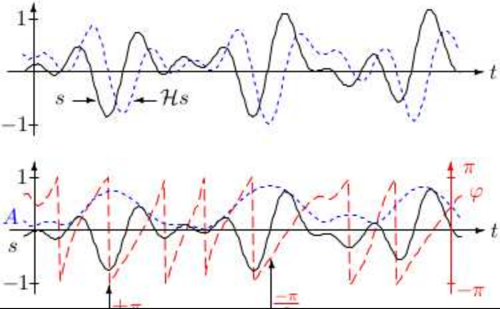
- $\hat{s}(t) \longrightarrow$ $$\begin{aligned} \hat{s}_A(\omega) &= \begin{cases} 2\hat{s}(\omega) \text{ si } \omega \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } \omega < 0 \end{cases} \\ &= \hat{s}(\omega) + sgn(\omega)\hat{s}(\omega) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} TF^{-1}(sgn(\omega))(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} sgn(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} -e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{it}e^{i\omega t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{it}e^{i\omega t}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{i\pi t} = i\frac{1}{\pi t} \end{aligned}$$
- $s(t) \longrightarrow s_A(t) = s(t) + i\left(s(t) * \frac{1}{\pi t}\right) = s(t) + iTH[s](t)$
- Transformée de Hilbert : $TH[s](t) = \frac{1}{\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau$

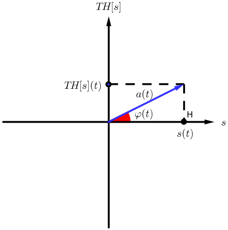
Signal analytique en 1D

Généralisation de la méthode

Signal analytique associé au signal réel

$$s_A(t) = s(t) + i\,TH[s](t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$$





Phase φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$-\frac{\pi}{2}$
Forme locale				

Contents

Signal analytique en 2D

Transformée de Riesz

Signal analytique associé à un signal 2D

- En 1D : $s_A(t) = s(t) + i\,TH[s](t)$
- En 2D : $s_M(x) = s(x) + i\,TR_1(x) + j\,TR_2(x)$

Transformée Riesz vs. Hilbert

- $TH[s](t) = \frac{1}{\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau \overset{TF}{\longleftrightarrow} -i\frac{\omega}{|\omega|}\hat{s}(\omega)$
- $TR_1[s](x) = \frac{1}{2\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau_1 s(t-\tau)}{\|\tau\|^3} d\tau \overset{TF}{\longleftrightarrow} -i\frac{\omega_1}{|\omega|}\hat{s}(\omega)$
- $TR_2[s](x) = \frac{1}{2\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau_2 s(t-\tau)}{\|\tau\|^3} d\tau \overset{TF}{\longleftrightarrow} -i\frac{\omega_2}{|\omega|}\hat{s}(\omega)$

Signal analytique en 2D
Transformée de Riesz

Propriété de l'opérateur de Riesz

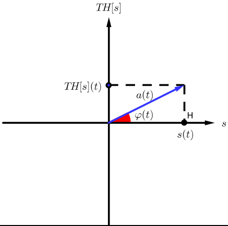
- $TR[s](x) = TR_1[s](x) + iTR_2[s](x) \overset{TF}{\longleftrightarrow} -i\frac{\omega_1 + i\omega_2}{\|\omega\|}\hat{s}(\omega)$
- $TR[s(a \cdot + b)](x) = TR[s(\cdot)](ax + b)$ (invariance par translation et changement d'échelle)
- $TR[s(R_\theta \cdot)](x) = e^{i\theta} TR[s(\cdot)](R_\theta x)$ (invariance par rotation à un facteur près)
- $s(x) = A\cos(\xi^T x)$ avec $\xi^T = \xi[\cos(\alpha) \sin(\alpha)]$, $TR[s](x) = A|\sin(\xi^T x)|$, $arg\{TR[s]\} = \alpha$
- $TR[s] = \nabla_{\mathbb{C}}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} s$ avec $\Delta^\alpha \overset{TF}{\longleftrightarrow} \|\omega\|^{2\alpha}$

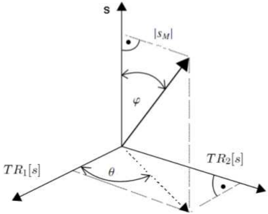
Signal analytique en 2D

Signal monogénique

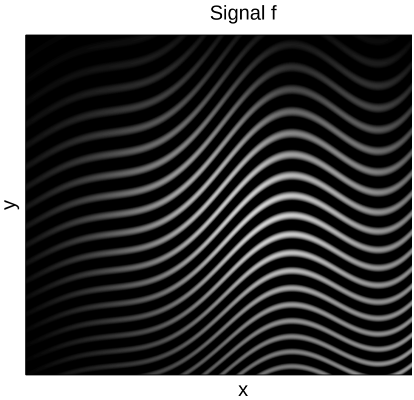
Définition de l'orientation θ et la phase φ

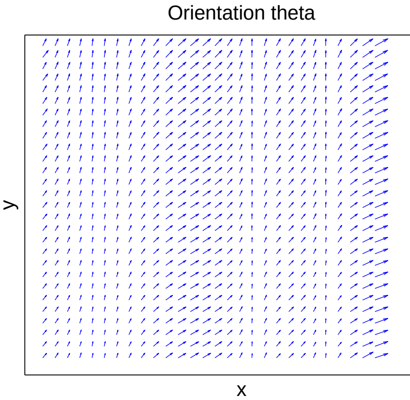
- $s_A(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ TH[s](t) \end{bmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} = a(t)\begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix}$
- $s_M = \begin{bmatrix} s \\ TR_1[s] \\ TR_2[s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \end{bmatrix}$



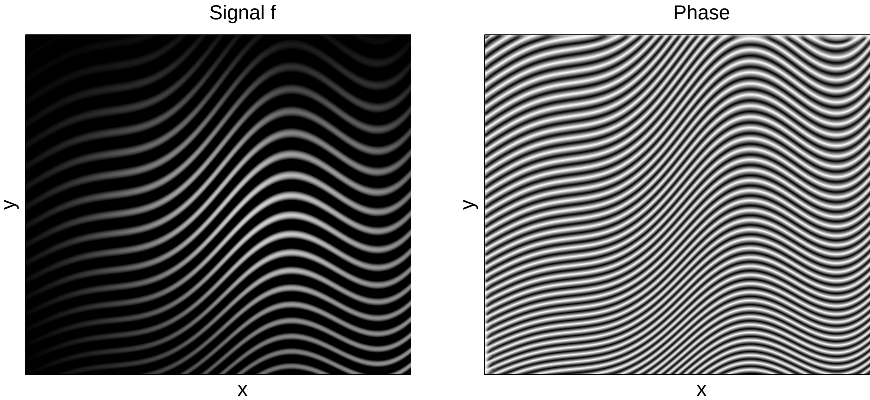


Exemples
Signal monogénique

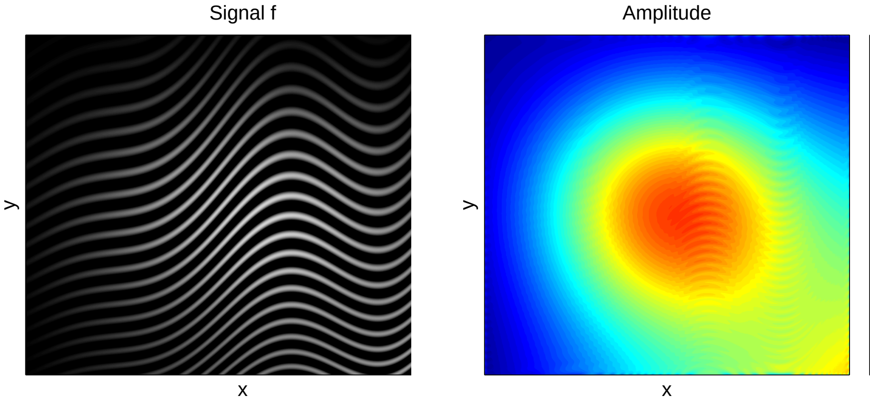




Exemples
Signal monogénique

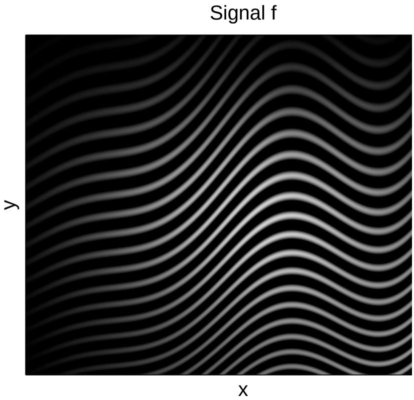


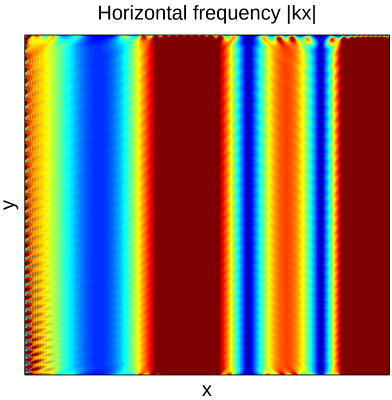
Exemples
Signal monogénique



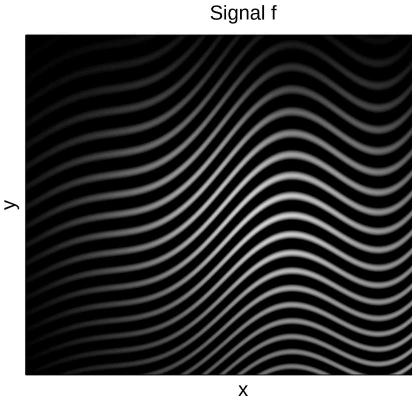
Exemples

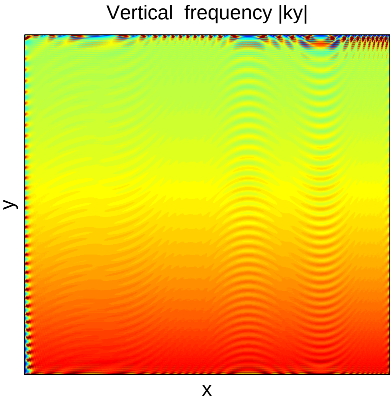
Signal monogénique





Exemples
Signal monogénique





Contents

Transformée en ondelettes monogéniques (MWT)

Construction d'une ondelette monogénique

Décomposition classique en ondelettes

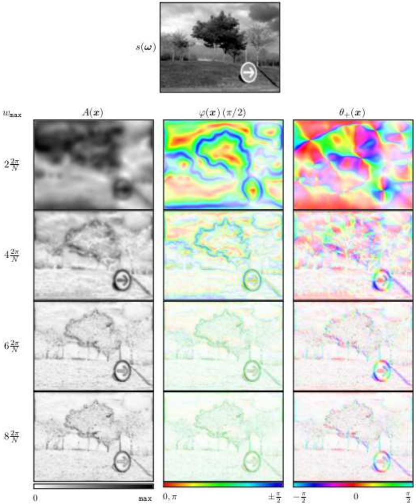
- $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une ondelette admissible
  $C_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{|\xi|^2} d\xi < +\infty$
- Famille d'ondelettes $\psi_{a,\alpha,b} = T_b R_\alpha D_a \psi$
- $c_f(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{\psi_{a,\alpha,b}(x)}dx$

Construction d'une ondelette monogénique

- $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une ondelette admissible,
  $\psi^{(M)} = (\psi, TR_1[\psi], TR_2[\psi])$, reste admissible
- Coefficients en ondelettes monogéniques de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sont les vecteurs : $c_f^{(M)}(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{\psi^{(M)}_{a,\alpha,b}(x)}dx$

Transformée en ondelettes monogéniques (MWT)

Exemple



Contents

Questions ?