Transfinite surface interpolation over irregular *n*-sided domains

Kévin Polisano

A partir d'un article de Tamas Varady, Alyn Rockwood & Peter Salvi

11 janvier 2012

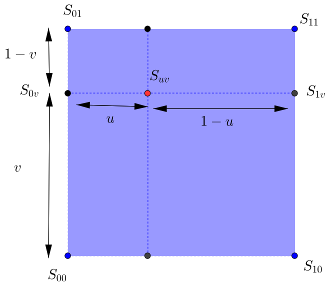
Grenoble INP
Ensimag

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES. TECHNOLOGIE. MEDECINE
GRENOBLE 1

Contents

Les travaux de Coons

Patch associé à 4 sommets



Interpolation bilinéaire des 4 sommets

$$
\begin{aligned}
S_{0v} &= (1-v)S_{00} + vS_{01} \\
S_{1v} &= (1-v)S_{10} + vS_{11} \\
S_{uv} &= uS_{1v} + (1-u)S_{0v}
\end{aligned}
$$

Les travaux de Coons

Patch associé à 4 bords

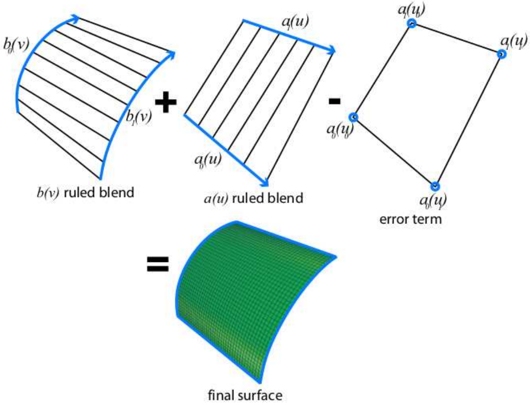
Mélange bilinéaire des 4 bords corrigé

$$S(u,v) = [1-u \;\; u]\begin{bmatrix} S(0,v) \\ S(1,v) \end{bmatrix} + [S(u,0) \;\; S(u,1)]\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} - [1-u \;\; u]\begin{bmatrix} S(0,0) & S(0,1) \\ S(1,0) & S(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

Problème : pour imposer continuité C^1 entre 2 patchs voisins

Les travaux de Coons

Patch associé à 4 bords



Les travaux de Coons

Patch de Coons généralisé

Fonctions de mélange quelconques

$$S(u,v) = [f_1(u)\ f_2(u)] \begin{bmatrix} S(0,v) \\ S(1,v) \end{bmatrix} + [S(u,0)\ S(u,1)] \begin{bmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \end{bmatrix} - [f_1(u)\ f_2(u)] \begin{bmatrix} S(0,0) & S(0,1) \\ S(1,0) & S(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \end{bmatrix}$$

Somme égale à 1 + $f_1(0) = g_1(0) = 1$ et $f_1(1) = g_1(1) = 0$

Les travaux de Coons

Fonctions de mélange d'Hermite

$$
\begin{aligned}
U &= [\alpha_0(u) \quad \beta_0(u) \quad \alpha_1(u) \quad \beta_1(u)],\\
V &= [\alpha_0(v) \quad \beta_0(v) \quad \alpha_1(v) \quad \beta_1(v)],\\
S^u &= [S(u,0) \quad S_v(u,0) \quad S(u,1) \quad S_v(u,1)],\\
S^v &= [S(0,v) \quad S_u(0,v) \quad S(1,v) \quad S_u(1,v)],\\
S^{uv} &= \begin{bmatrix} S(0,0) & S_u(0,0) & S(1,0) & S_u(1,0) \\ S_v(0,0) & S_{uv}(0,0) & S_v(1,0) & S_{uv}(1,0) \\ S(0,1) & S_u(0,1) & S(1,1) & S_u(1,1) \\ S_v(0,1) & S_{uv}(0,1) & S_v(1,1) & S_{uv}(1,1) \end{bmatrix}\\
S(u,v) &= V(S^u)^T + S^v U^T - VS^{uv}U^T.
\end{aligned}
$$

Les travaux de Coons

Patch de Coons réarrangé

Coordonnées de côté locales (s_i, r_i)

On paramétrise les bords par $s_i = s_i(u, v)$ et $r_i = 1 - s_{i-1}$

Notations

Contrainte de position $P_i(s_i)$ et tangencielle $T_i(s_i)$.
$P_1(s_1) = S(u, 0)$, $T_1(s_1) = S_v(u, 0)$, $P_2(s_2) = S(1, v)$, $T_2(s_2) = -S_u(1, v)$, etc Dérivées croisées aux coins $W_i(0)$, et $T_i^\star(r_i) = T_{i-1}(s_{i-1})$

Les travaux de Coons

Patch de Coons réarrangé

Fonctions de mélange quelconques

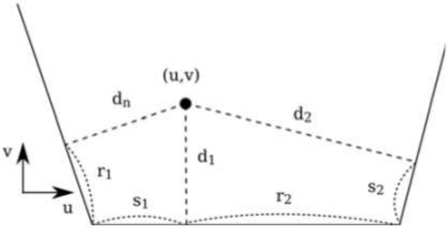
$$S(u,v) = \sum_{i=1}^{4} [\alpha_0(r_i)\ \beta_0(r_i)] \begin{bmatrix} P_i(s_i) \\ T_i(s_i) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{4} [\alpha_0(r_i)\ \beta_0(r_i)] \begin{bmatrix} P_i(0) & T_i^{\star}(0) \\ T_i(0) & W_i(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(s_i) \\ \beta_0(s_i) \end{bmatrix}$$

Réarrangement

$$R_i(s_i, r_i) = P_i(s_i) + r_i T_i(s_i)$$
$$Q_i(s_i, r_i) = P_i(0) + r_i T_i(0) + s_i T_i^{\star}(0) + r_i s_i W_i(0)$$
$$S(u,v) = \sum_{i=1}^{4} R_i(s_i, r_i)\alpha_0(r_i) - \sum_{i=1}^{4} Q_i(s_i, r_i)\alpha_0(r_i)\alpha_0(s_i)$$

Contents

Fonctions de mélange
Paramètre de distance



- $d_i = d_i(u, v)$ certaine mesure de distance aux côtés
- $d_i = 0$ sur le côté i et croît en s'éloignant
- $S_i(d_i) = R_i(d_i)\alpha_i(d_i) \Rightarrow \alpha_i(0) = 1$ (interpolation position)
- $\frac{\partial S_i}{d_i} = R_i'(d_i)\alpha_i(d_i) + R_i(d_i)\alpha'(d_i) \Rightarrow \alpha_i'(0) = 0$

Fonctions de mélange

Patch de Coons généralisé

Fonctions de mélange généralisées

$$S(u,v) = \sum_{i=1}^{n} R_i(s_i, d_i)\lambda_i(d_1, \ldots, d_n) - \sum_{i=1}^{n} Q_i(s_i, r_i)\kappa_i(d_1, \ldots, d_n)$$

Comment construire les fonctions de mélange λ_i et κ_i ?

λ_i : fonctions de mélange des côtés

κ_i : fonctions de mélange des coins

μ_i : fonctions spéciales de mélange des côtés

Fonctions de mélange

Exemple de construction

Fonctions de mélange des côtés

- λ_i doit valoir 1 sur le côté i et passer de 1 à 0 sur les côtés adjacents $i-1$ et $i+1$.
- Sur les $n-3$ autres côtés elle doit s'annuler

Construction

$D^n_{i_1,\ldots,i_n} = \prod_{i \neq i_1,\ldots,i_n} d_i^2$, $\lambda_i(d_1, \ldots, d_n) = \frac{D^n_{i-1,i} + D^n_{i,i+1}}{\sum_{j=1}^n D^n_{j-1,j}}$

$n = 4$, $i = 1$ $\lambda_1(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_4^2}{d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_4^2 + d_4^2 d_1^2}$

$d_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $d_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$,

$d_4, d_2 = 0$ et $d_1 = d_3 \Rightarrow \lambda_1 = 0.5$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 2$

Fonctions de mélange

Exemple de construction

Fonctions de mélange des coins

- κ_i doit valoir 1 au coin i et passer de 1 à 0 sur les côtés adjacents $i-1$ et i. Nulle sur les $n-2$ autres côtés
- $S(u,v) = \sum_{i=1}^{n} C_i(s_i, r_i)\kappa_i(d_1, \ldots, d_n)$

Construction

$$\kappa_i(d_1, \ldots, d_n) = \frac{D_{i-1,i}^{n}}{\sum_{j=1}^{n} D_{j-1,j}^{n}}$$

$$n = 4, i = 1 \ \kappa_1(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{d_2^2 d_3^2}{d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_4^2 + d_4^2 d_1^2}$$

$$(d_1, d_4) = (0,0) \Rightarrow \kappa_1 = 1, \ d_2, d_3 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = 0,$$

$$d_1 = 0 \text{ et } d_4 = d_2 \Rightarrow \kappa_1 = 0.5, \ \sum_{i=1}^{n} \kappa_i = 1$$

Fonctions de mélange

Exemple de construction

Fonctions spéciales de mélange des côtés

μ_i doit valoir 1 au côté i et passer de 1 à 0 sur les autres côtés

$$S(u,v) = \sum_{i=1}^{n} R_i(s_i, d_i)\mu_i(d_1, \ldots, d_n)$$

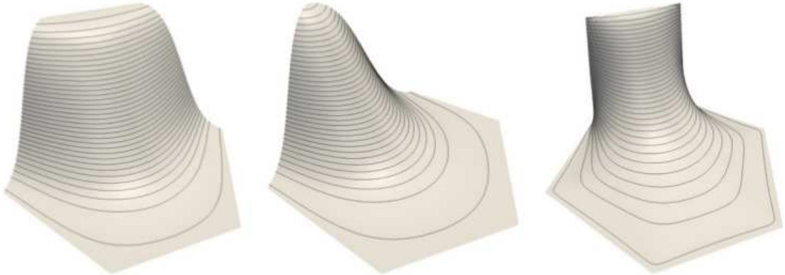
Construction

$\mu_i(d_1, \ldots, d_n) = \frac{D_i^n}{\sum_{j=1}^n D_j^n}$

$n = 4, i = 1 \ \mu_1(d_1, d_2, d_3, d_4) = \frac{d_2^2 d_3^2 d_4^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 d_1^2 + d_4^2 d_1^2 d_2^2}$

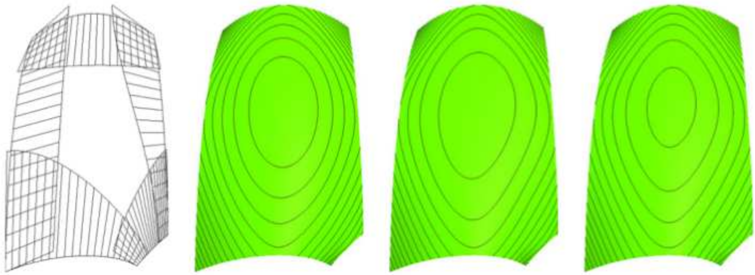
$d_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 1, \ d_2, d_3, d_4 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = 0$

Fonctions de mélange
Les 3 méthodes d'interpolation



(a) Side blending. (b) Corner blending. (c) Special side blending.

Fonctions de mélange
Résultat du remplissage

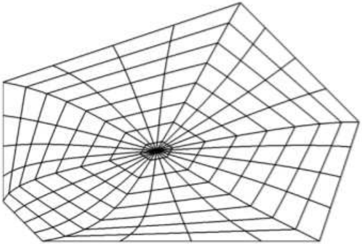


(a) Ribbons for five sides. (b) Direct generalization. (c) Corner interpolants. (d) Ribbon interpolants.

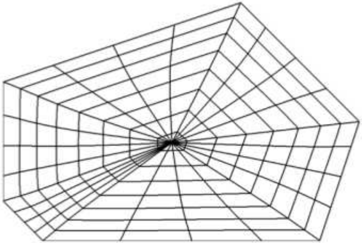
Contents

Choix du domaine

Motivation domaine non régulier



(a) Regular domain.



(b) Proportional domain.

Choix du domaine

Notations

$p_i = (u_i, v_i)$ sommets du polygone, L_i longueur des courbes frontières en entrée, ϕ_i l'angle 3D entre 2 frontières adjacentes. l_i et α_i la longueur et les angles du polygone.

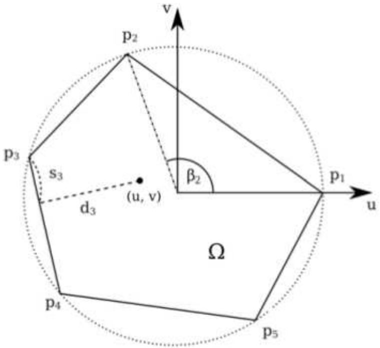
Objectif

Construire un domaine convexe « similaire » à la configuration 3D. Soit déterminer les l_i, α_i qui minimisent :

$$\sum (l_i - c_{length} L_i)^2 + \sum (\alpha_i - c_{angle} \phi_i)^2$$

Choix du domaine

Solution 1

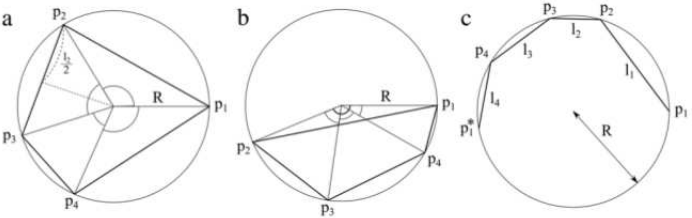


Placement proportionnel en longueur d'arc

On place les sommets p_i sur le cercle en tournant d'un angle $\beta_i = 2\pi \frac{\sum_{k=1}^{i-1} L_k}{\sum_{k=1}^{n} L_k}$

Choix du domaine

Solution 2

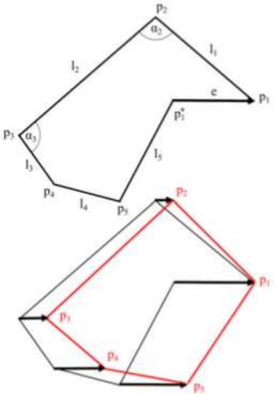


Placement suivant les L_i

On place les sommets p_i sur le cercle de sorte que $[p_i, p_{i+1}] = L_i$

Choix du domaine

Solution 3



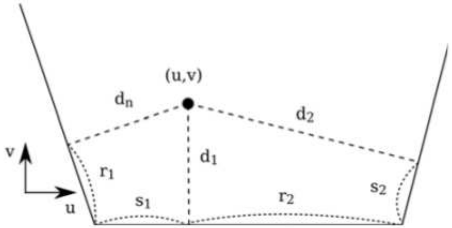
Placement proportionnel en longueur d'arc

$c_{angle} = (n-2)\pi / \sum \phi_i,$
$\alpha_i = c_{angle}\phi_i$
On place les sommets de sorte que $[p_i, p_{i+1}] = L_i$ et $(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) = \alpha_i$.
On note $\vec{e} = \vec{p_n p_1}$ et on déplace chaque sommet de $\vec{e_i} = \frac{i}{n}\vec{e}$

Contents

Choix de la paramétrisation

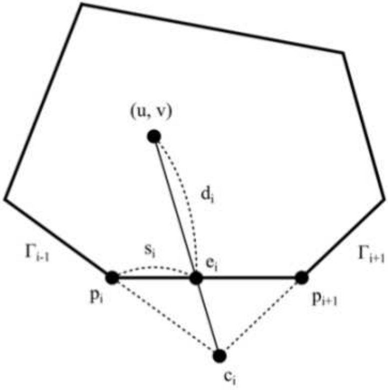
Projection orthogonale



Problèmes

- Projection en dehors du segment côté
- Difficulté de définir s_i
- $s_i = d_{i-1}/(d_{i-1} + d_{i+1}) \in [0, 1]$
- Mapping non linéaire $s = 0.5 \neq$ milieu de la corde

Choix de la paramétrisation
Fonction de distance radiale

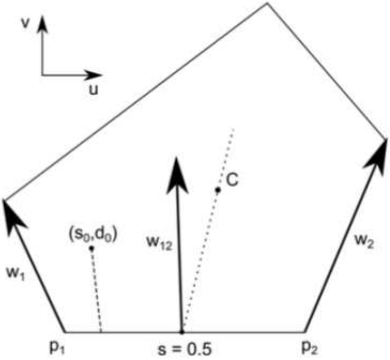


Charrot et Gregory

- $d_i = |(u,v) - e_i|$
- $s_i = |e_i - p_i|$

Choix de la paramétrisation

Balayage de ligne centrale



Charrot et Gregory

- c barycentre sommets ou $0.5 \sum_i p_i(l_{i-1} + l_i) / \sum_i p_i l_i$
- $s = 0.5$ ligne contenant c
- $\exists d_c, r(0.5, d_c) = c$

Choix de la paramétrisation

Balayage de ligne centrale

Balayage ligne centrale

- $r(s,d) = p_2 s + [w_1(1-s)^2 + 2w_{12}(1-s)s + w_2 s^2]d$
- d_c et $w_{12} = (w_{12}^u, w_{12}^v)$ inconnus
- hypothèse : $w_{12}^v = 0.5(w_1^v + w_2^v)$, $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (p_2^u, 0)$
- $s = 0.5 \Rightarrow c^v = 0.25[w_1^v + 2w_{12}^v + w_2^v]d_c \Rightarrow d_c = 2c^v/(w_1^v + w_2^v)$ puis l'autre coordonnée donne
- $c^u = p_2^u 0.5 + 0.25[w_1^u + 2w_{12}^u + w_2^u]d_c \Rightarrow w_{12}^u$
- $r(s_0, d_0) = (u_0, v_0) \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} d_0 & = & \frac{u_0 - p_2^u s_0}{w_1^u(1-s_0)^2 + 2w_{12}^u(1-s_0)s_0 + w_2^u s_0^2} \\ & = & \frac{v_0}{w_1^v(1-s_0) + w_2^v s_0} \end{array}$

Choix de la paramétrisation

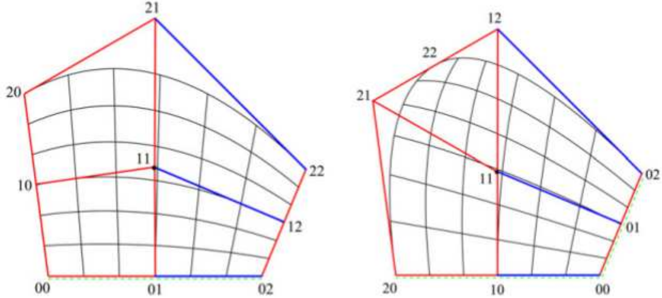
Mapping biquadratique

Mapping biquadratique

- $s = cst$ ligne mapper en ligne droite dans domaine
- (s, d) déterminés par des points de contrôles de Bézier biquadratique placés sur les côtés du domaine
- Mapping linéaire sur un côté et quadratique à l'intérieur du domaine
- $(u, v) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} C_{ij} B_i^2(s) B_i^2(d)$
- (s, d) inverse mapping par Newton-Raphson

Choix de la paramétrisation

Mapping biquadratique



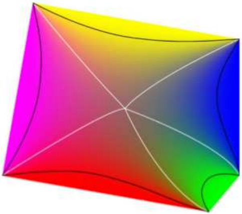
(a) Side parameterization.

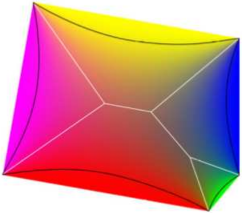
(b) Corner parameterization.

Contents

Retour sur les 3 facteurs influents

Choix des fonctions de mélanges





Influence des bords

- Dépend de la mesure de distance
- Noir = poids>90%
- Blanc = égales distances
- influence d'un petit côté, en vert, sur l'ensemble de la surface interpolée

Retour sur les 3 facteurs influents
Choix du domaine

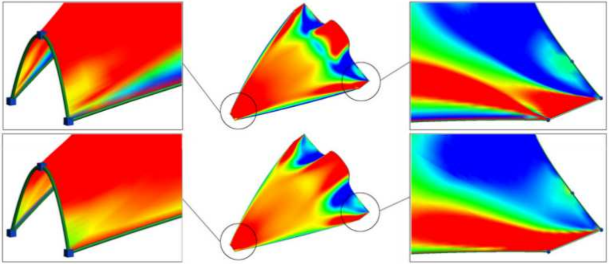


Fig. 17. Mean curvature map of a model using regular (top) and non-regular (bottom) domain polygons.

Retour sur les 3 facteurs influents

Choix de la paramétrisation

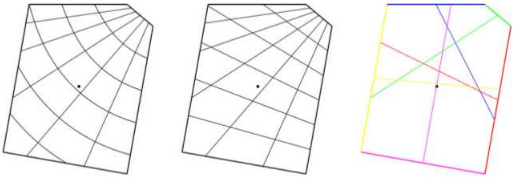


Fig. 13. Radial distance function: (a) (s_3, d_3) and (b) (s_2, s_3) parameter lines, (c) halving lines.

Influence sur le mapping

- Paramètre milieu $\neq$ ligne « milieu » du domaine
- Paramétrisation radiale
- Mapping distorsion
- Ligne bleue excentrée

Retour sur les 3 facteurs influents

Choix de la paramétrisation

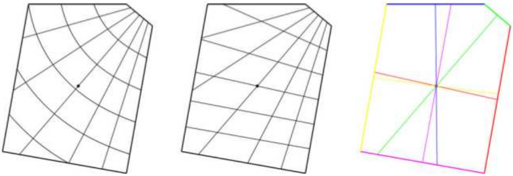


Fig. 14. Central line sweep: (a) (s_3, d_3) and (b) (s_2, s_3) parameter lines, (c) halving lines.

Influence sur le mapping

- Paramètre milieu $\neq$ ligne « milieu » du domaine
- Paramétrisation balayage ligne centrale
- Mapping mieux équilibré
- Limite les artefacts

Ouverture

Ouverture

- Introduire des domaines non convexes ou avec des frontières courbes
- Améliorer le contrôle de l'intérieur de la surface

Questions