Solving the interior problem of computed tomography using a priori knowledge

Kévin Polisano

A partir d'un article de M. Courdurier, F. Noo, M. Defrise & H. Kudo

17 décembre 2012

Contents

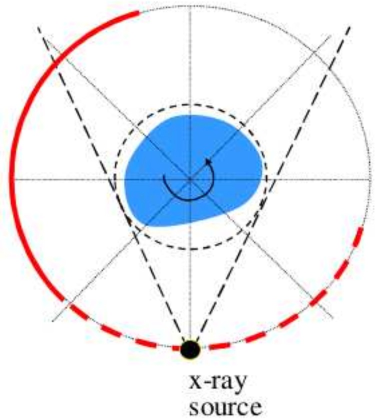
Introduction
Les trois classes de troncatures

Toutes les lignes intégrales mesurées $\Rightarrow$ reconstruction exacte et stable. Si un certains nombre de mesures manquent (données tronquées) alors :

Différents problèmes

- Problème d'angle limite
- Problème extérieur
- Problème intérieur

Introduction
Problème d'angle limité

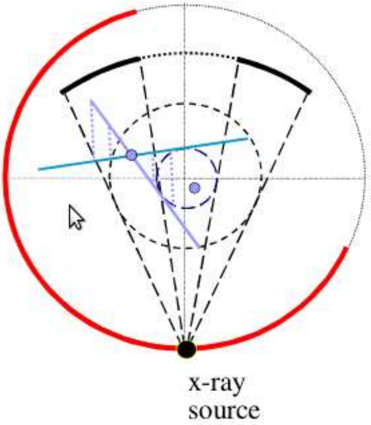


Reconstruction

- En théorie exacte
- Non stable

Introduction

Problème extérieur

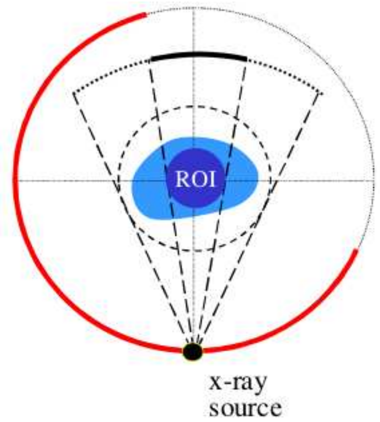


Reconstruction

- En théorie exacte
- Non stable

Introduction

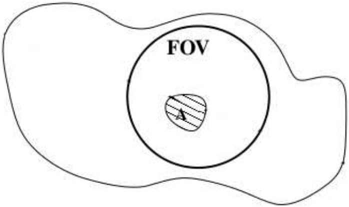
Problème intérieur



Reconstruction

- En théorie impossible, non unicité
- Non stable
- Sauf discontinuités

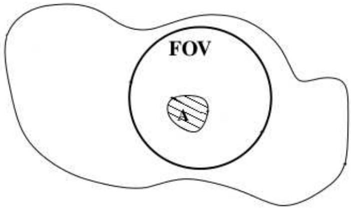
Sujet d'étude
Problème intérieur



Hypothèses

- Transformée de Radon pour toute ligne traversant la $FOV = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < a\}$
- FOV inclus strictement dans l'objet
- Support de la fonction d'atténuation connu
- Valeur connue dans une sous-région A de la FOV

Sujet d'étude
Problème intérieur



Résultats

- Unicité retrouvée
- Analyse de la stabilité
- Quantifier l'exactitude de la reconstruction

Contents

Unicité de la fonction d'atténuation

Transformée de Hilbert 1D

Transformée de Hilbert 1D

La transformée de Hilbert d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\sigma(\mathbb{R})$ est définie comme :

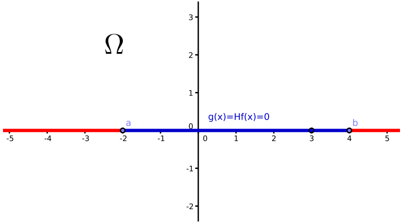
$$Hf(y) = \frac{1}{\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-y} dx$$

$$Hf(y) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{y-\epsilon} \frac{f(x)}{x-y} dx + \int_{y+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-y} dx \right]$$

Lemme

Si $f(x) = 0$ et $Hf(x) = 0$ pour tout $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$

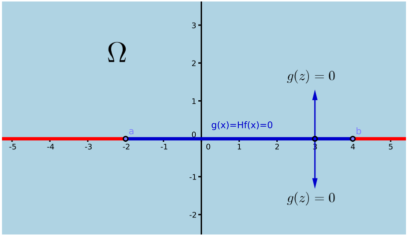
Unicité de la fonction d'atténuation
Passage aux complexes



Passage aux complexes

- $\Omega = \mathbb{C} \backslash (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$
- $g(z) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)}{x-z} dx + \int_{b}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-z} dx \right]$
- $g(x) = Hf(x) = 0$ sur (a, b)

Unicité de la fonction d'atténuation
Prolongement analytique

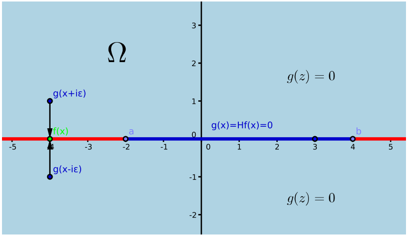


Prolongement analytique

- $g = \underline{0}$ sur (a, b), g et $\underline{0}$ analytiques
- (a, b) ouvert convexe de Ω
- D'où $g(z) = 0$ sur tout Ω

Unicité de la fonction d'atténuation

Formule de Plemelj-Sokhotski



Formule de Plemelj-Sokhotski

- $\forall x \in \mathbb{R} \backslash [a, b] \quad \lim_{y \to 0^+} g(x+iy) - \lim_{y \to 0^-} g(x+iy) = \frac{1}{2i} f(x)$
- D'où $f = 0$ sur $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$
- **Conclusion** : $f = 0$ sur tout $\mathbb{R}$

Unicité de la fonction d'atténuation

Transformée de Hilbert 1D

Corollaire

Si f et Hf sont connues sur $(a,b) \subset \mathbb{R}$ alors f est déterminée de manière unique sur $\mathbb{R}$

Preuve : Si f_1 et f_2 sont telles que $f_{1|(a,b)} = f_{2|(a,b)} = f_{|(a,b)}$ alors $g = f_1 - f_2 = 0$ sur (a,b) et par linéarité de la transformée de Hilbert $Hg = Hf_1 - Hf_2 = 0$ sur (a,b). D'après le lemme $g = 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où $f_1 = f_2$.

Unicité de la fonction d'atténuation

Transformée de Hilbert

Transformée de Hilbert 2D

La transformée de Hilbert d'une fonction $\mu \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans la direction du vecteur $\eta \in \mathbb{R}^2$ est définie comme :

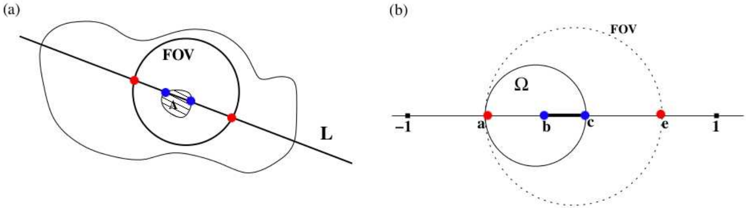
$$H_\eta f(x) = -\frac{1}{\pi} v.p \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(x - t\eta)}{t} dt$$

Lien entre transformée de Radon et Hilbert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0 - \frac{\pi}{2}}^{\alpha_0 + \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial s} R\mu(s, \alpha) \right]_{s = x\dot{\theta}(\alpha)} = H_{\theta_0}\mu(x)$$

Unicité de la fonction d'atténuation

Réduction du problème en 1D



$L = \{x_0 + t\eta\}$, $f(t) := \mu(x_0 + t\eta)$ restriction de μ à L. On a la relation $Hf(t_0) = H_\eta\mu(x_0 + t_0\eta)$. Si $x_0 + t_0\eta \in FOV$ alors $Hf(t_0)$ peut être calculé à partir des données. Donc $Hf(t)$ connu sur (a, e) et $f(t)$ connu sur $(b, c) \subset (a, e)$, on en conclue que f **uniquement déterminée** sur $\mathbb{R}$.

Contents

Reconstruction : etude de la stabilité

Formule de reconstruction

Inversion de la transformée de Hilbert tronquée

$$\sqrt{1-x^2}f(x) = C + \frac{1}{\pi} v.p \int_{-1}^{1} \frac{Hf(y)}{x-y}\sqrt{1-y^2}dy$$

$$h_1(x) = C + \frac{1}{\pi}\int_a^e \frac{Hf(y)}{x-y}\sqrt{1-y^2}dy,\ C = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

$$h_2(x) = \frac{1}{\tau(x)}\frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{a} \frac{Hf(y)}{x-y}\sqrt{1-y^2}dy + \int_e^1 \frac{Hf(y)}{x-y}\sqrt{1-y^2}dy\right]$$

$$\sqrt{1-x^2}f(x) = h_1(x) + \tau(x)h_2(x)$$

Reconstruction : etude de la stabilité

Erreurs de mesures dues au bruit

Bruit affecte les données mesurées

- $G_m(x) \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0-\pi/2}^{\alpha_0+\pi/2} \left[\frac{\partial}{\partial s} R_m\mu(s,\alpha)\right]_{s=x\cdot\theta(\alpha)} d\alpha \neq H_{\theta_0}\mu(x)$
- $g_m(t) \neq Hf(t)$
- Erreurs de mesures reportées dans h_1

Reconstruction : etude de la stabilité

Hypothèse : erreur sur h_1 bornée

Hypothèse sur l'erreur de h_1

$$\forall x \in (a,e),\ \Big|\underbrace{h_{1,r}(x) - h_1(x)}_{h_{1,err}(x)}\Big| < \epsilon E(x),\ \ E(x) \leqslant 1, \forall x \in (b,c)$$

Borner l'erreur sur f_r

- $f_{err}(x) = f_r(x) - f(x)$
- $\sqrt{1-x^2} f_{err}(x) = h_{1,err}(x) + \tau(x) h_{2,err}(x)$
- Borner $|f_{err}(x)|$ revient à borner $|h_{2,err}(x)|$

Reconstruction : etude de la stabilité

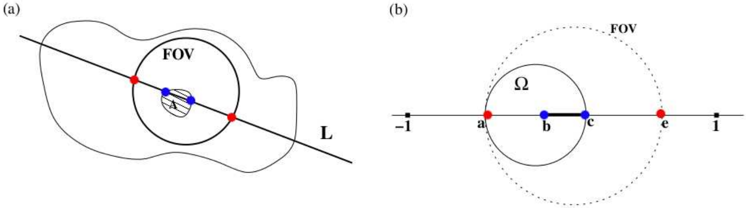
Borne d'erreur de h_2 sur (b, c)

Borne d'erreur de h_2 sur (b, c)

- $f_{err}(x) = f_r(x) - f(x) = 0$ sur (b, c)
- $\sqrt{1 - x^2} f_{err}(x) = h_{1,err}(x) + \tau(x) h_{2,err}(x) = 0 \Rightarrow$
- $\forall x \in (b, c), |h_{2,err}(x)| = \left| \frac{h_{1,err}(x)}{\tau(x)} \right| < \frac{\epsilon}{|\tau(x)|}$

Reconstruction : etude de la stabilité

Borne d'erreur de h_2 sur (a, b)



Résultat sur (a, b) en passant aux complexes

- $h_{2,err}(z)$ sur $\mathbb{C} \backslash ((-1, a) \cup (e, 1))$
- Ω : disque de diamètre (a, c) ôté de $D = (b, c) \subset \partial\Omega$
- Objectif : Borner $|h_{2,err}(z)|$ sur Ω

Reconstruction : etude de la stabilité

Principe de Nevanlina

- $f(z)$ analytique sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, $D \subset \partial\Omega$ telle que

$$|f(z)| \leqslant \begin{cases} \varepsilon & z \in D \\ M & z \in \partial\Omega \backslash D \end{cases}$$

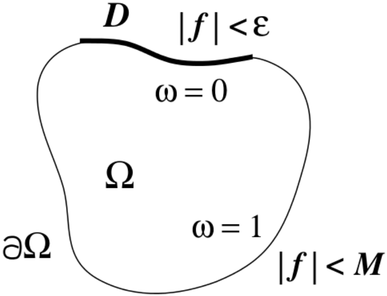
- ω harmonique sur Ω telle que

$$w(z) = \begin{cases} 0 & z \in D \\ 1 & z \in \partial\Omega \backslash D \end{cases}$$

$$|f(z)| \leqslant M \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1-\omega(z)}, \quad \forall z \in \Omega$$

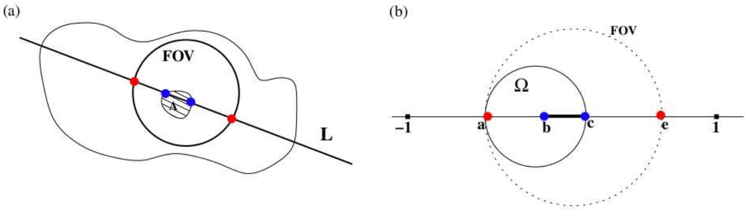
Reconstruction : etude de la stabilité

Principe de Nevanlina



Reconstruction : etude de la stabilité

Borner l'erreur de $h_{2,err}(z)$ sur la frontière de Ω

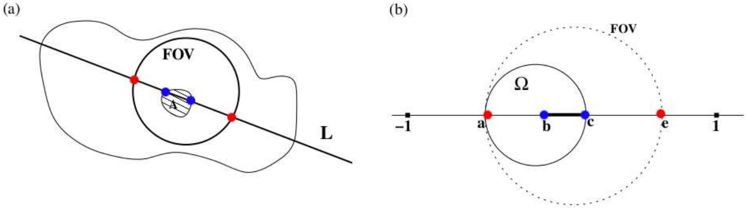


Borne d'erreur de $h_{2,err}(z)$ sur $D = (b, c)$

- $\tau(z) = \kappa + \int_{-1}^{a} \frac{1}{z-y} dy$
- $\tau(x) = \kappa + \ln\left(\frac{x+1}{x-a}\right)$ minimum en $x = c$
- $\forall x \in (b, c), |h_{2,err}(x)| < \frac{\epsilon}{|\tau(x)|} \leqslant \frac{\epsilon}{\kappa + \ln\left(\frac{c+1}{c-a}\right)}$

Reconstruction : etude de la stabilité

Borner l'erreur de $h_{2,err}(z)$ sur la frontière de Ω

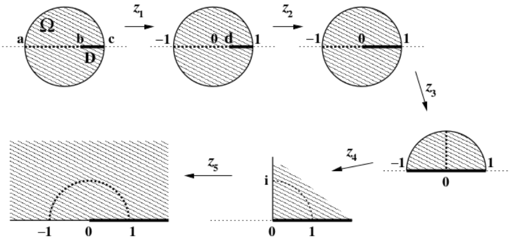


Borne d'erreur de $h_{2,err}(z)$ sur $\partial\Omega\backslash D$

- $\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}|Hf(x)| \leqslant \begin{cases} M_1/2 & x \in (-1,a) \\ M_2/2 & x \in (e,1) \end{cases}$
- $|h_{2,err}(z)| < \sqrt{2}M_1$ pour $z \in \partial\Omega\backslash D$

Reconstruction : etude de la stabilité

Construction d'une fonction harmonique sur la frontière de Ω



Construction de ω sur $\partial\Omega$

- $w_H(re^{i\beta}) = \beta/\pi$, $w(z) = w_H(z_5 \circ z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1(z))$
- $\omega(x) = \frac{4}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{2(b-x)(c-a)}{(c-a)^2-(2b-a-c)(2x-a-c)}}$

Reconstruction : etude de la stabilité

Borne d'erreur de $|h_{2,err}(z)|$ sur tout Ω

Borne d'erreur de $|h_{2,err}(z)|$ sur la frontière $\partial\Omega$

$$|h_{2,err}(z)| \leqslant \begin{cases} \frac{\epsilon}{\kappa + \ln\left(\frac{c+1}{c-a}\right)} \equiv \varepsilon & z \in D \\ M_1/2 \equiv M & z \in \partial\Omega \backslash D \end{cases}$$

Borne d'erreur de $|h_{2,err}(z)|$ sur tout Ω

$$|h_{2,err}(z)| \leqslant M \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1-\omega(x)} \quad \forall z \in \Omega$$

Reconstruction : etude de la stabilité

Borne d'erreur de la reconstruction f_r

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2}|f_{err}(x)| &\leqslant |h_{1,r}(x)| + |\tau(x)||h_{2,err}(x)| \\ &< \epsilon E(x) + |\tau(x)| M \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1-\omega(x)}\end{aligned}$$

Borne d'erreur de $|f_{err}(x)|$ sur (a, b)

$$\sqrt{1-x^2}|f_r(x) - f(x)|$$

$$<$$

$$\epsilon E(x) + \sqrt{2} M_1 \left(\kappa + \ln\left(\frac{x+1}{x-a}\right)\right) \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2} M_1 \left(\kappa + \ln\left(\frac{c+1}{c-a}\right)\right)}\right)^{1-\omega(x)}$$

Reconstruction : etude de la stabilité

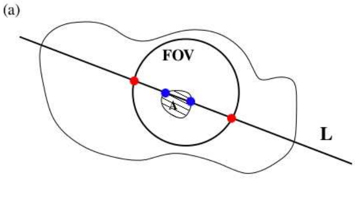
Comportement de l'erreur de la reconstruction f_r

Comportement de l'erreur $|f_{err}(x)|$ sur (a, b)

- $|f_{err}(x)| \leqslant K(x)\epsilon^{\delta(x)}, \quad \delta(x) = 1 - \omega(x)$
- $\lim\limits_{x \to b} \delta(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to a} \delta(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to b} K(x) = \dfrac{\kappa + \ln\left(\frac{b+1}{b-a}\right)}{\left(\kappa + \ln\left(\frac{c+1}{c-a}\right)\right.} < +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} K(x) = +\infty$

Reconstruction : etude de la stabilité

Zones de stabilité

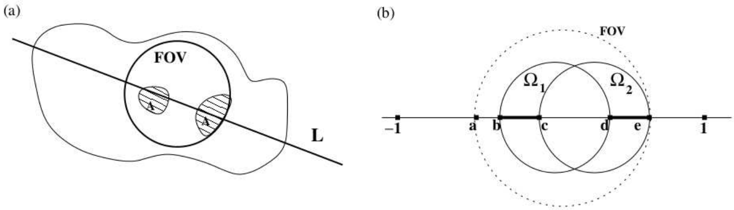


Zones de stabilité

- En 1D : reconstruction stable au voisinage de b et instable en s'éloignant vers a
- En 2D : reconstruction stable autour de la région A de densité connue, et instable en s'éloignant dans la FOV vers les régions de mesures incomplètes

Reconstruction : etude de la stabilité

Zones de stabilité pour 2 régions connues



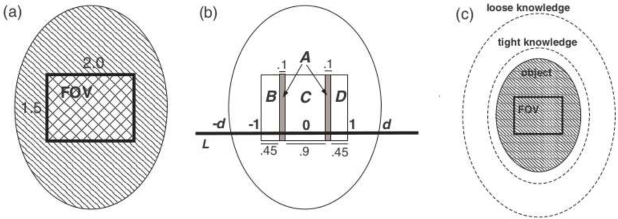
Zones de stabilité

Reconstruction stable autour des deux régions A de densité connue **ET** entre ces deux régions. De même instable en s'éloignant dans la FOV vers les régions de mesures incomplètes

Contents

Simulation numérique

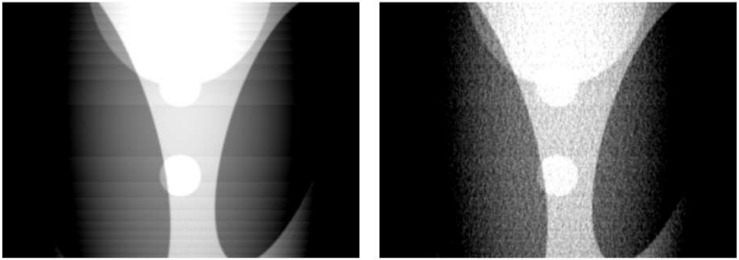
Reconstruction par projection sur des convexes



$$E_1 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ \tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in (-0.55,-0.45)\cup(0.45,0.5)\}$$
$$E_2 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ \tilde{f}(x) = 0\ \forall x \notin (-d_i, d_i)\}$$
$$E_3 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ f \geqslant 0\}$$
$$E_4 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ |H\tilde{f}(x) - g_m(x)| \leqslant \epsilon\ \forall x \in (-1,1)\}$$
$$E_5 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ \int_{-d_i}^{d_i} \tilde{f}(x)dx = R_m\mu(s, \tfrac{\pi}{2})\}$$

Simulation numérique

Sans considération de sous régions connues

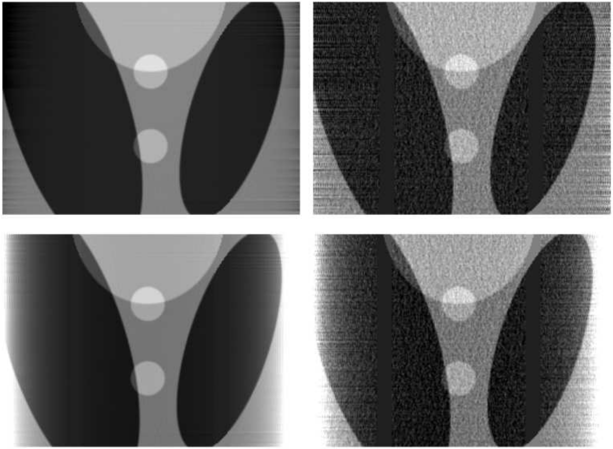


Recherche de f_r dans l'intersection $\cap E_i \setminus E_1$

Sans tenir des comptes des régions A connues on observe de nombreux artefact

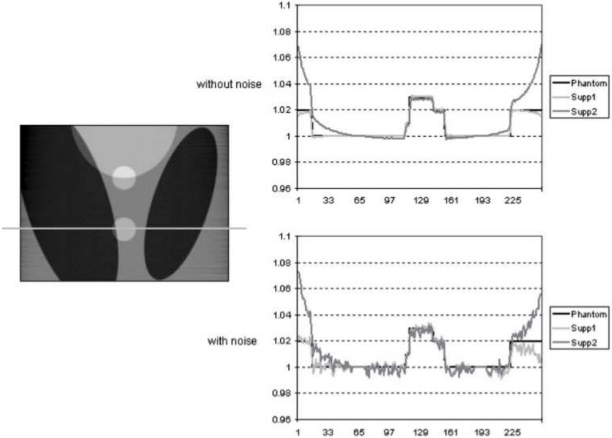
Simulation numérique

Avec considération de sous régions connues



Simulation numérique

Visualisation d'un profil



Simulation numérique

Exemples d'applications

Exemples d'applications

- Examens du coeur, couplés à d'autres techniques d'imagerie
- Répétition de scan, évolution locale

Questions ?