Solving the interior problem of computed tomography using a priori knowledge

Kévin Polisano

4/12/2012

1 Introduction

On a cru pendant longtemps qu'il était nécessaire de disposer de toutes les projections pour être capable de déterminer la fonction d'atténuation. On sait aujourd'hui qu'il est possible, sous certaines conditions, de reconstruire l'objet ou une partie de celui-ci à partir de données tronquées. On observe trois classes de tels problèmes : les problèmes d'angles limités, problèmes extérieurs et problèmes intérieurs. C'est cette dernière catégorie qui dans l'article fait l'objet de nouveaux résultats théoriques en matière de reconstruction. Il est connu qu'en absence de bruit, la reconstruction à partir de données même tronquées pour les problèmes extérieur et d'angles limités est exacte, mais instable. Quant au problème intérieur, il est non seulement instable mais non unique, il est possible de construire des fonctions μ_N non nulles sur la région intérieure telle que leur projection à travers celle-ci soit nulle, de sorte que $\mu + \mu_N$ soit également une solution du problème intérieur. Dans cet article on se place dans le cadre suivant : la $FOV = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < a\}$ est complètement incluse dans l'objet et on suppose que le support compact de la fonction d'atténuation est connu, et que **sa valeur est connue pour une sous région de la FOV**. Dans ces conditions, les même auteurs ont établi dans de précédents articles que l'on retrouve l'unicité sur la région intérieure. Dans ce présent article ils donnent un résultat encore plus fort en démontrant l'unicité sur l'espace entier $\mathbb{R}^2$. Comme l'unicité n'implique pas la stabilité il est également question d'analyser théoriquement celle-ci. L'intérêt de cette analyse réside dans le fait que pour reconstruire la fonction d'atténuation on est amené à inverser une transformée de Hilbert avec des données limitées et on a pour cela recourt à la POCS (projection sur des ensembles convexes) qui ne garantie pas la convergence en présence de bruit. Ainsi pouvoir borner l'erreur entre la fonction théorique f et la fonction reconstruite f_r permet de montrer que le problème n'est pas arbitrairement instable et d'avoir une idée sur la précision atteignable, indépendemment de l'algorithme de reconstruction utilisé.

2 Preuve de l'unicité

Les données dont nous disposons en tomographie sont le résultat de la transformée de Radon, autrement dit les projections $R\mu(s, \alpha)$. La preuve de l'unicité du problème intérieur avec une connaissance a priori s'appuie sur des propriétés de la transformée de Hilbert. Or on a un lien entre la transformée de Radon de la fonction d'atténuation μ et sa transformée d'Hilbert, défini dans le corollaire 3.2. Il est ainsi possible de calculer la transformée de Hilbert $H_\eta(x)$ en tout point x de la FOV et ce pour toutes les directions η, ce qu'affirme le corollaire 3.3.

Propriété de la transformée de Hilbert

On travaille en une dimension (soit sur la droite réelle $\mathbb{R}$). Le lemme 2.1 stipule que si f et Hf sont toutes deux nulles sur un ouvert $(a, b) \subset \mathbb{R}$ alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ entier. On a donc réalisé un prolongement, et c'est justement sur le théorème de prolongement analytique que repose la démonstration de ce lemme. D'ailleurs il y a un lien entre les fonctions analytiques et la transformée de Hilbert, qui est en fait la façon dont elle est apparue historiquement. En effet partant d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on peut l'étendre en une fonction harmonique sur le demi plan $\mathbb{R}^2$. Toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction analytique. Maintenant on considère la partie imaginaire d'une fonction analytique, en particulier sa valeur à la frontière. Il apparaît que les valeurs à la frontière sont Hf, la transformée de Hilbert. Pour démontrer que f est nulle sur la droite réelle on va en quelque sorte procéder de la même manière (car $\mathbb{R}$ est la frontière du demi plan de Poincaré), on va travailler sur le plan en passant en complexe en définissant la fonction analytique sur $\Omega = (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \cup (a, b)$:

$$g(z) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)}{x-z}dx + \int_{b}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-z}dx\right]$$

qui coïncide avec $Hf(x)$ sur (a, b) (car $f(x) = 0$ sur (a, b)). Comme par hypothèse $Hf(x) = 0$ sur (a, b) alors $g(x) = 0$ sur (a, b). C'est là qu'on utilise le théorème du prolongement analytique, comme g et la fonction nulle (analytique aussi) coïncident sur l'ouvert (a, b) (convexe) alors elles coincident sur Ω tout entier. Enfin la formule de Plemelj-Sokhotski :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash[a, b] \qquad \lim_{y\to 0^+} g(x + iy) - \lim_{y\to 0^-} g(x + iy) = \frac{1}{2i}f(x)$$

permet de montrer que f est également nulle sur $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, ce qui achève la preuve. Avec les mains cette formule indique que les valeurs sur la frontière $f(x)$ dépendent de ce qu'il y a autour, à savoir $g(z)$. On fait alors l'analogie avec la formule de Cauchy en analyse complexe :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Le lemme ainsi démontré, il en découle directement le corollaire 2.2 : Si f et Hf sont connues sur $(a, b) \subset \mathbb{R}$ alors f est déterminée de manière unique sur $\mathbb{R}$. En effet si f_1 et f_2 sont telles que $f_{1|(a,b)} = f_{2|(a,b)} = f_{|(a,b)}$ alors $g = f_1 - f_2 = 0$ sur (a, b) et par linéarité de la transformée de Hilbert $Hg = Hf_1 - Hf_2 = 0$ sur (a, b). D'après le lemme $g = 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où $f_1 = f_2$.

Rappelons que dans nos hypothèses nous connaissons $H_\eta(x)$ sur toute la FOV et $\mu(x)$ sur une partie A de la FOV (ici x étant ici un vecteur de $\mathbb{R}^2$) ce qui est ni plus ni moins les hypothèses du corollaire que nous venons d'énoncer, à l'exception que ce dernier s'applique en 1D. Qu'à cela ne tienne, on considère une droite L intersectant la région A. On se ramène à un problème 1D en restreignant μ à cette droite, soit f la densité sur celle-ci. De même la FOV correspond alors à un intervalle (a, e) et la région A à un intervalle $(b, c) \subset (a, e)$. Par conséquent Hf et f étant connus sur (b, c) le corollaire s'applique et démontre l'unicité de f sur la droite L. En faisant de même sur toutes les droites on démontre donc que μ est uniquement déterminé sur $\mathbb{R}^2$. CQFD.

remarque : nous disposons d'une formule d'inversion de la transformée de Hilbert tronquée :

$$\sqrt{1-x^2}f(x) = C + \frac{1}{\pi}v.p\int_{-1}^{1} \frac{Hf(y)}{x-y}\sqrt{1-y^2}dy$$

Comme on peut le constater cette formule nécessite de connaitre Hf sur $[-1,1]$ entier, or comme on l'a vu on ne le connait que sur (a,e), c'est pourquoi cette formule d'inversion n'est pas utilisée en pratique pour retrouver f. Ceci dit nous allons l'utiliser de manière théorique pour étudier la stabilité de la reconstruction dans le cas où les données sont bruitées.

3 Etude de la stabilité

En présence de bruit les mesures ne correspondent plus exactement à $R\mu(s,\alpha)$ mais à une valeur approchée $R_m\mu(s,\alpha)$, donc la quantité $\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0-\pi/2}^{\alpha_0+\pi/2}\left[\frac{\partial}{\partial s}R_m\mu(s,\alpha)\right]_{s=x\cdot\theta(\alpha)}d\alpha \overset{def}{\equiv} G_m(x)$ n'est plus exactement égale à la transformée de Hilbert $H_{\theta_0}\mu(x)$ comme le stipulait le corollaire 3.2. On dénote par $g_m(t)$ la réduction en 1D de $G_m(x)$ (comme précédemment en projetant sur une droite L). En absence de bruit on aurait bien $g_m(t) = Hf(t)$ mais ici ce n'est plus le cas.

On utilise alors la formule d'inversion citée précédemment. Comme Hf est calculable sur (a,e) on découpe naturellement l'intégrale de cette façon :

$$\sqrt{1-x^2}f(x) = h_1(x) + \tau(x)h_2(x)$$

avec

$$h_1(x) = C + \frac{1}{\pi}\int_a^e \frac{Hf(y)}{x-y}\sqrt{1-y^2}dy$$

$$h_2(x) = \frac{1}{\tau(x)}\frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{a}\frac{Hf(y)}{x-y}\sqrt{1-y^2}dy + \int_e^1 \frac{Hf(y)}{x-y}\sqrt{1-y^2}dy\right]$$

Le bruit affectant les données mesurées, c'est-à-dire les projections $R_m\mu(s,\alpha)$ soit encore la transformée de Hilbert, il perturbe la fonction h_1. Tandis que h_2 est définie avec les valeurs de Hf qui ne peuvent être calculées à partir des mesures (car en dehors de (a,e) donc de la FOV). Le terme d'erreur de mesures se reportent donc dans h_1,

On suppose premièrement connaitre une borne de l'erreur commise sur $h_1(x)$

$$\forall x \in (a,e), \quad |\underbrace{h_{1,r}(x) - h_1(x)}_{h_{1,err}(x)}| < \epsilon E(x), \quad E(x) \leqslant 1, \forall x \in (b,c)$$

En notant $f_{err}(x) = f_r(x) - f(x)$, nous voulons alors borner $|f_{err}(x)|$ en fonction de ϵ pour $x \in (a,b)$ (vu que sur (c,e) on observera le même comportement par symétrie). Comme on a $\sqrt{1-x^2}f_{err}(x) = h_{1,err}(x) + \tau(x)h_{2,err}(x)$ et que $h_{1,r}$ est déjà bornée en fonction de ϵ par hypothèse, donc borner $|f_{err}(x)|$ revient à borner $|h_{2,err}(x)|$.

Sur l'intervalle (b,c) c'est aisé on a $f_{err}(x) = 0$ donc

$$\forall x \in (b,c), |h_{2,err}(x)| = \left|\frac{h_{1,err}(x)}{\tau(x)}\right| < \frac{\epsilon}{|\tau(x)|}$$

Pour déterminer une borne sur l'intervalle qui nous intéresse, à savoir (a,b) , il faudrait donc quelque part utiliser comme précédemment un prolongement. On procède alors de la même manière en définissant $h_{2,err}(z)$ sur $\mathbb{C}\backslash((-1,a)\cup(e,1))$. On va travailler plus spécifiquement sur le domaine Ω correspondant au disque de diamètre (a,c) auquel on a fait une entaille en retirant $D = (b,c)$ qui fait maintenant partie de la frontière du domaine $D \subset \partial\Omega$. Ce domaine est bien celui qui nous intéresse puisque l'on connait une borne sur (b, c) et que l'on en cherche une sur (a, b) donc on va s'intéresser à ce qu'il y a autour de cet intervalle. Ce domaine possède exactement la géométrie de celui utilisé dans le lemme 2.5, on va donc pouvoir appliquer le **principe de Nevanlina** dans le but de borner $|h_{2,err}(z)|$ sur tout le domaine Ω connaissant une borne de $|h_{2,err}(x)|$ sur un morceau de la frontière $D = (b, c)$. Le principe nécessite également que l'on connaisse une borne sur le reste de la frontière $\partial\Omega\backslash D$. Or comme Hf est $\mathcal{C}^\infty$ (car $f \in \mathcal{C}_0^\infty$) alors il existe M_1 et M_2 tels que :

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}|Hf(x)| \leqslant \left\{ \begin{array}{ll} M_1/2 & x \in (-1, a) \\ M_2/2 & x \in (e, 1) \end{array} \right.$$

On en tire alors $|h_{2,err}(z)| < \sqrt{2}M_1$ pour $z \in \partial\Omega\backslash D$. Pour pouvoir appliquer le principe il faut que le majorant soit constant, alors que sur D notre majorant est $\frac{\epsilon}{|\tau(x)|}$ (la fonction étant la pour compenser la singularité des intégrales). On choisit alors une telle fonction :

$$\tau(z) = \kappa + \int_{-1}^{a} \frac{1}{z-y} dy$$

qui vaut sur (b, c) (en intégrant) :

$$\tau(x) = \kappa + \ln\left(\frac{x+1}{x-a}\right)$$

et qui, en étudiant la fonction, est minimale en $x = c$ donc *in fine* :

$$|h_{2,err}(z)| \leqslant \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\epsilon}{\kappa+\ln\left(\frac{c+1}{c-a}\right)} \equiv \varepsilon & z \in D \\ M_1/2 \equiv M & z \in \partial\Omega\backslash D \end{array} \right.$$

Et le lemme 2.5 a permis de construire (par des transformations géométriques) la fonction ω suivante qui est nulle sur D et vaut 1 sur $\Omega\backslash D$:

$$\omega(x) = \frac{4}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{2(b-x)(c-a)}{(c-a)^2 - (2b-a-c)(2x-a-c)}}$$

Le théorème de Nevanhila donne alors

$$|h_{2,err}(z)| \leqslant M \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1-\omega(x)} \qquad \forall z \in \Omega$$

On a donc en particulier une borne sur (a, b), d'où :

$$\sqrt{1-x^2}|f_{err}(x)| \leqslant |h_{1,r}(x)| + |\tau(x)||h_{2,err}(x)| < \epsilon E(x) + |\tau(x)|M \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1-\omega(x)}$$

soit en remplaçant par $|\tau(x)|$, M et ε leur expression, on obtient le théorème 4.2.

Ce résultat est certes théorique car $\epsilon E(x)$ et M_1 ne sont entre autres pas connus, mais en l'écrivant sous une forme factorisée :

$$|f_{err}(x)| \leqslant K(x)\epsilon^{\delta(x)}, \quad \delta(x) = 1 - \omega(x)$$

on a d'après la définition de $\omega(x)$, $\lim\limits_{x\to b} \delta(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to a} \delta(x) = 0$ tandis que $K(x)$ tend vers une limite finie quand $x \to b$ et diverge pour $x \to a$. Cela signifie que au voisinage de b la reconstruction est plutôt correcte (car l'erreur est bornée par une constante) alors qu'en s'éloignant vers a

la reconstruction devient instable. En 2D cela implique que la reconstruction de μ est correcte près de la région A et devient moins correcte au fur et à mesure que l'on s'en éloigne, vers les régions de mesures incomplètes.

remarque : En suivant le même schéma on peut montrer que si on dispose de deux régions disjointes A et B sur lesquelles on connait la fonction de densité μ alors la reconstruction est également correcte entre les deux régions.

Résumons les hypothèses qui ont été émises sur la fonction reconstruite f_r :

$$
\begin{cases}
(i)\ supp f_r(x) \subset (-1,1) \\
\\
(ii)\ f_r(x) = f(x),\ \forall x \in (b,c) \\
\\
S_\epsilon \equiv \{f_r \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}),\ (iii)\ |h_{1,r}(x) - h_1(x)| < \epsilon E(x),\ \forall x \in (a,e),\ E(x) \leqslant 1\ \forall x \in (b,c)\} \\
\\
(iv)\ \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}|Hf_r(x)| \leqslant \begin{cases} M_1/2 & x \in (-1,a) \\ M_2/2 & x \in (e,1) \end{cases}
\end{cases}
$$

C'est donc dans cette réunion d'ensembles convexes que l'on cherchera par la suite la fonction reconstruite f_r.

Amélioration des hypothèses

Pour le moment on sait majorer l'erreur de $|f_r(x) - f(x)|$, mais ces résultats ne sont pas simples à interpréter car ils demandent en particulier que f_r vérifie (iii) ce qui signifie que l'on doit borner l'erreur $|h_{1,r}(x) - h_1(x)|$ ce qui n'est pas direct vu la définition de h_1. C'est pourquoi il serait préférable de pouvoir donner une borne d'erreur pour la reconstruction qui s'exprimerait en fonction de quantité en relation directe avec les mesures, à savoir $R_m\mu(s,\alpha)$ et $g_m(t)$ (hypothèses (iv) et (v)). On définit donc de nouvelles hypothèses :

$$
\begin{cases}
(i)\ supp f_r(x) \subset (-1,1) \\
\\
(ii)\ f_r(x) = f(x),\ \forall x \in (b,c) \\
\\
A_\epsilon \equiv \{f_r \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}),\ (iii)\ \frac{1}{\pi}|Hf_r(x)| \leqslant \begin{cases} M_1/2 & x \in (-1,a) \\ M_2/2 & x \in (e,1) \end{cases} \\
\\
(iv)\ Hf_r(x) - g_m(x) = \lambda(x),\ |\lambda(x)| < \epsilon,\ x \in (a,e) \\
\\
(v)\ |\int_{\mathbb{R}} f_r(y)dy - R_m\mu(s_0,\alpha_0)| < \epsilon
\end{cases}
$$

Le problème est que si $f \in A_\epsilon$ alors cela ne garantit pas que $f \in S_\epsilon$. A la place on va reconstruire une approximation lissée $\bar{f} = \phi * f(x)$ de l'atténuation originale f par un noyau de lissage ϕ. Ainsi on montre que pour une fonction admissible $f_r \in A_\epsilon$, la fonction $\bar{f}_r = \phi * f_r$ comme reconstruction de $\bar{f} = \phi * f$ présente une erreur de reconstruction bornée.

4 Simulations numériques

On va travailler avec le fantôme de Shepp-Logan. L'objectif étant de reconstruire une région intérieure (une FOV rectangulaire) en supposant connues deux bandes verticales (région A) qui sépare ainsi la région intérieure en trois parties B, C et D. On considère également 2 types de supports de la fonction d'atténuation μ. Soit L une droite horizontale intersectant la FOV et f la restriction de μ à L. On a donc les propriétés suivantes sur f :

(i) f connue sur $(-0.55, -0.45) \cup (0.45, 0.5)$

(ii) f nulle en dehors du support considéré $(-d_i, d_i)$

(iii) $f \geqslant 0$ car c'est une densité

(iv) $g_m(x)$ calculé par DBP sur $(-1, 1)$

(v) $R_m\mu(s, \frac{\pi}{2})$ mesurée sur la ligne L

On va donc chercher à reconstruire une fonction positive f_r qui coincide avec f sur $(-0.55, -0.45)$, nulle en dehors du support $(-d_i, d_i)$, dont l'intégrale sur $(-d_i, d_i)$ vaut la projection $R_m\mu(s, \frac{\pi}{2})$ et enfin dont la transformée de Hilbert ne soit pas trop loin de $g_m(x)$ sur $(-1, 1)$, autrement dit on cherche f_r dans l'intersection de ces ensembles :

$$E_1 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ \tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in (-0.55, -0.45) \cup (0.45, 0.5)\}$$

$$E_2 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ \tilde{f}(x) = 0\ \forall x \notin (-d_i, d_i)\}$$

$$E_3 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ f \geqslant 0\}$$

$$E_4 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ |H\tilde{f}(x) - g_m(x)| \leqslant \epsilon\ \forall x \in (-1, 1)\}$$

$$E_5 \equiv \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ \int_{-d_i}^{d_i} \tilde{f}(x)dx = R_m\mu(s, \tfrac{\pi}{2})\}$$

,

Comme ces ensembles sont convexes, on utilise la POCS pour trouver f_r dans l'intersection, en projetant itérativement sur chacun des E_i. Dans le cas où on omet de projeter sur E_1, c'est-à-dire si on ne tient pas compte de la connaissance a priori de la densité sur la région A on obtient les images reconstruites de la figure 8.

Ces deux images avec ou sans bruit présentent de nombreux artefacts propres au problème intérieur que nous avons mentionné en introduction (non unicité). Si maintenant on tient compte de la région connue en projetant sur E_1 alors on obtient les images de la figure 9.

On constate alors effectivement que la région C figurant entre les deux bandes connues a une reconstruction correcte et stable même en présence de bruit comme il a été établi théoriquement. Quant aux régions extérieures B et D on observe également que la reconstruction est correcte près des bandes, mais qu'elle tend à être instable lorsque l'on s'en écarte vers les zones non mesurées. Ceci est plus flagrant sur les images du bas où le support est plus grand autour de l'objet et donc plus il y a de mesures non effectuées.

5 Conclusion

Dans cet article il a été démontré puis vérifier empirement que l'ajout d'une connaissance sur le support de la fonction d'atténuation μ et la valeur de celle-ci dans une sous région de la FOV permettait de déterminer de manière unique μ sur tout l'espace. De plus, en bornant l'erreur, il a été établi que la reconstruction était stable près de la région connue (ou entre deux régions comme vérifié par l'expérience sur le fantôme de Shepp-Logan).

On peut donner deux exemples d'intérêts pratiques de ces nouvelles avancées. Dans le cas d'irradiation du coeur (qui est bien une région d'intérêts strictement intérieure au patient), la reconstruction autour d'une FOV limitera les doses d'irradiations, ce qui est bien entendu intéressant. On a facilement accès à une information sur le support (au pire la trajectoire du scanner), mais la connaissance d'une région intérieure est plus délicate, c'est pourquoi on peut coupler avec d'autres techniques d'imagerie médicale pour identifier la densité de tissus ou os aux alentours du coeur.

Autre exemple dont j'avais déjà émis l'idée en aparté, est lors d'une répétition de scans dans le but d'observer une évolution (de tumeur, ou d'injection d'agents de constraste comme souvent utilisés en urologie) après un premier cliché réalisé. Certaines régions ne seront pas affectées par cette évolution et auront donc le rôle régions connues pour les clichés suivants.