TP 1-2
Calcul de Transformées de Fourier sur Scilab
Utilisation de la FFT et Application

Rédaction des TP par binôme ou seul : 2 séances de TP sont prévues. Le contenu des TP est prévu pour pouvoir être terminé (coté programmation scilab) pendant ces séances qui sont encadrées. Un compte-rendu des TP est à rédiger après la deuxième séance, et à remettre à votre chargé de TD d'analyse (E. Bretin, F. Cadoux, S. Meignen, ou V. Perrier).
Dans le compte-rendu, doivent êre rédigés tous les **exercices** : certains sont théoriques, donc à chercher en dehors des heures encadrées, d'autres sont pratiques et demandent une programmation SCILAB. Vous devez incérer les figures dans votre compte-rendu et apporter un soin particulier aux commentaires des résultats. Ayez l'esprit critique et soignez la présentation (légende pour les courbes, commentaires des courbes dans le texte en référençant les figures). Les programmes scilab doivent figurer en ANNEXE (et non pas dans le texte!): ce rapport n'est pas un rapport technique sur des programmes scilab, mais un rapport de compréhension mathématique sur des résultats obtenus sur ordinateur. Bref : n'hésitez pas à demander des conseils!

Compte tenu du fait que SCILAB a été appris pendant le stage de mathématiques appliquées, nous ne faisons pas de rappel sur ce langage de programmation.

1 Séries de Fourier : étude du phénomène de Gibbs

Dans cette partie nous allons étudier la vitesse de convergence de la série de Fourier d'une fonction. En particulier, quand la fonction est discontinue, la série de Fourier "tronquée" présente des oscillations, même pour un nombre de termes important : c'est le phénomène de Gibbs.

Exercice 1 *(théorique)* Soit la fonction 1-périodique f, définie sur $[-1/2, 1/2[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \textit{pour} \quad -1/2 < x < 0 \\ 1 & \textit{pour} \quad 0 < x < 1/2 \end{cases} \tag{1}$$

Calculer la série de Fourier de f et expliquer en quels points x la formule ci-dessous est valide :

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2(2n+1)\pi x)}{2n+1} \tag{2}$$

Exercice 2 *(pratique)* Ecrire un programme SCILAB traçant la série de Fourier tronquée de la fonction f de l'exercice précédent (formule (1)) : en pratique reprendre la formule (2) et calculer la somme partielle des `(Ntermes+1)`-premiers termes, pour une valeur de `Ntermes` entrée au clavier :
$->$ `Ntermes =input('Entrer le nombre de termes')`
Pour la boucle de contrôle :

```
for i=0:Ntermes
S= S+ ...
end
```

Quel phénomène observez-vous sur le graphe? Comment varie-t-il avec `Ntermes`? Que pouvez-vous en conclure sur la convergence de la série de Fourier?
Tous les termes de votre série sont-ils bien représentés? En particulier, en combien de points x calculez-vous la dernière fonction de la somme partielle? Qe vaut-elle en ces points?

2 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Dans cette partie on introduit la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un vecteur de $\mathbb{C}^N$ et on étudie ses principales propriétés.

Définition Soit $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ un vecteur de $\mathbb{C}^N$. On appelle Transformée de Fourier Discrète de X, le vecteur $\hat{X} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{N-1})$ défini par :

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3}$$

Exercice 3 *(théorique)* Calculer $\hat{X}$ pour un vecteur X défini par :

1. $x_k = 1$, $x_n = 0$, $\forall n = 0, \ldots, N-1,\ n \neq k$.

2. $x_n = 1$, $\forall n = 0, \ldots, N-1$.

3. Pour k_0 entier fixé entre 0 et $N-1$, $x_n = e^{2i\pi \frac{k_0 n}{N}}$, $\forall n = 0, \ldots, N-1$.

Exercice 4 *(théorique)*

1. On suppose dans cette question que X est **réel** et que N est un entier pair. Montrer que dans ce cas on a :

1. $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}$ et $\hat{x}_{\frac{N}{2}} \in \mathbb{R}$.
2. $\forall k = 0, \ldots, N-1$, $\hat{x}_{N-k} = \overline{\hat{x}_k}$

En déduire une symétrie dans la représentation graphique de la TFD.

Exercice 5 *(théorique)*

1. Montrer que pour tout $n = 0, \ldots, N-1$, on a *(Formule inverse de la TFD)* :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e^{2i\pi \frac{kn}{N}} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4}$$

Les $\hat{x}_k$ étant définis par la formule (3) .

2. Montrer que l'on a (*Formule de Parseval*) :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \overline{\hat{y}_k} \tag{5}$$

où $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{N-1})$ est la TFD de $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ et où $(\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{N-1})$ est la TFD de $(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$.
La transformée de Fourier discrète est programmée dans la fonction scilab "FFT" (pour Fast Fourier Transform (FFT), qui est un algorithme rapide de calcul des coefficients de la TFD).

Exercice 6 (*pratique*)

1. Sur Scilab tapez "help fft" et étudier la documention.
Ecrire un programme Scilab permettant le calcul de la transformée Fourier discrète d'un vecteur X. Appliquer ce programme aux 3 exemples de l'exercice 3 et comparer les résultats.

3 Calcul approché de coefficients de Fourier en utilisant la FFT

L'objectif de cette partie est le calcul puis le tracé des coefficients de Fourier, d'un signal. Les coefficients de Fourier d'un signal temporel T-périodique $s(t)$, de carré intégrable, sont définis par:

$$c_s(k) = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-2i\pi\frac{kt}{T}}dt \tag{6}$$

t est la variable **temps**, exprimée en secondes, $\frac{k}{T}$ représente la **fréquence**, exprimée en Hertz.
La courbe $s(t)$ en fonction de t est la **représentation temporelle** du signal s, les courbes $|c_s(k)|$ et $arg(c_s(k))$ en fonction de $\frac{k}{T}$ sont respectivement les représentations fréquentielles (discrètes) en module et en phase du signal s. Dans le cadre du TP nous traerons seulement les courbes de modules.

3.1 Calcul approché des coefficients de Fourier

Dans la pratique, le calcul des coefficients de Fourier à partir de la formule (6) est impossible car la fonction s n'est en général connue qu'en un nombre fini de points t_n, correspondant à un "échantillonnage" du signal s. On procède alors de la façon suivante :

1. Le signal s est supposé connu aux valeurs $(t_n)_{n=0,N-1}$ de l'intervalle $[0,T[$, avec :
$$t_n = \frac{nT}{N}$$
2. Le coefficient de Fourier $c_k(s)$ défini en (6) est approché par la méthode des rectangles pour le calcul de l'intégrale :
$$c_k(s) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(t_n)e^{-2i\pi\frac{kn}{N}} \ , \quad -\frac{N}{2}+1 \leq k \leq \frac{N}{2} \tag{7}$$
3. La fonction $s(t)$ est alors approchée par le polynôme trigonométrique $s_N(t)$:
$$s_N(t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} c_k(s)\ e^{2i\pi\frac{k}{T}t} \tag{8}$$
En particulier pour les valeurs $t_n = \frac{nT}{N}$, on obtient :
$$s_N(t_n) = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} c_k(s)\ e^{2i\pi\frac{kn}{N}}$$

Exercice 7 *(théorique)* Montrer qu'en prolongeant les vecteurs $(c_k(s))_{k=-N/2+1,N/2}$ sur $\mathbb{Z}$ par périodicité de période N, la formule (7) est à une normalisation près la Transformée de Fourier Discrète du vecteur $(s(t_n))_{n=0,N-1}$.

Exercice 8 *(pratique)*
1. Ecrire un programme Scilab calculant une valeur approchée des coefficients de Fourier de f, définie à l'exercice 1, à l'aide de la FFT (en déclarant la fonction f directement par la formule (1)).
2. Traer sur un même graphe le module des coefficients de Fourier de f obtenus d'une part par le calcul théorique (en utilisant l'exercice 1), d'autre part par FFT (question 1 de cet exercice). Que remarquez-vous? Comment interprétez-vous la symétrie artificielle des coefficients obtenus par FFT?
3. Calculer la norme ℓ^2 de la différence. Comment varie-t-elle avec N, nombre de points de discrétisation de la fonction f? Tracer la courbe de l'erreur en fonction de N en échelle logarithmique. Quelle loi vérifie-t-elle?

4 Transformée de Fourier de signaux académiques

Soit f_0 une fonction définie sur un intervalle $[0, T]$, et nulle en dehors. On souhaite calculer sa transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$. On commence par démontrer que le calcul de sa transformée de Fourier en certains points revient à calculer les coefficients de Fourier de f_0 prolongée par périodicité de période T en dehors de $[0, T]$. On est alors ramené à la partie précédente, et on peut utiliser la FFT pour le calcul approché de ces coefficients de Fourier.

Exercice 9 *(Rapport entre TF et coefficients de fourier, théorique)*
Soit f_0 une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, nulle en dehors de l'intervalle $[0, T]$. Soit f la fonction "périodisée" de f_0 à la période T:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(x + nT)$$

1. Vérifier que f est une fonction périodique de période T, intégrable sur $[0, T]$.
2. Montrer que le coefficient de Fourier de f, noté $c_n(f)$ ($n \in \mathbb{Z}$), vérifie :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\hat{f}_0(\frac{n}{T})$$

où $\hat{f}_0$ est la transformée de Fourier de la fonction f_0. Interprétation? Comment peut-on utiliser la FFT pour calculer f_0?

Exercice 10 Considérer successivement les signaux ci-dessous. On tracera leurs représentations temporelles ($f_0(x)$ en fonction de x) et fréquentielles ($\hat{f}_0(\nu)$ en fonction de ν). On comparera le résultat calculé par la FFT de SCILAB avec la transformée de Fourier théorique (ou avec les coefficients de Fourier pour les questions 4 et 5).
1. La fonction porte (fonction caractéristique de $[-1/2, 1/2]$) déclarée sur un intervalle plus grand.
2. La fonction triangle.
3. Une gaussienne.
4. Une sinusoide de fréquence 50 Hz. Vous devez observer une raie sur la TF, à la bonne fréquence!
5. Une somme de sinusoides (constater que la TF est linéaire et que les différentes raies sont aux bonnes fréquences...).

5 Résolution de l'équation de Poisson à l'aide de la transformée de Fourier

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation de Poisson $\triangle u = f$ en dimension 1 à l'aide de la transformée de Fourier. Dans une première partie, le problème sera résolu avec des conditions périodiques aux bords puis nous verrons comment adapter la méthode afin de prendre en compte des conditions aux limites nulles.

5.1 Avec des conditions périodiques

Nous souhaitons obtenir une solution u du problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \forall x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

Exercice 11 *(théorique)*

1. Montrer que ce problème n'a pas de solution si $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$.

2. Sous l'hypothèse $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$, montrer que ce problème admet une infinité de solutions. Parmi ces solutions, seulement la solution u^* de moyenne nulle sera retenue.

3. Montrer que la solution u^* du problème a pour transformée de Fourier :

$$u^*(x) = -\sum_{n\in Z^*} \frac{c_n(f)}{4\pi^2 n^2} \, e^{2i\pi nx}$$

où les coefficients $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.

Exercice 12 *Application : tracé de la solution*

Ecrire une fonction Scilab `Poisson_periodique` qui prend en argument un échantillonnage de f noté $[f_0, f_1, f_2, ..., f_{N-2}, f_{N-1}]$ et qui renvoie la solution du problème. Tester le programme avec des fonctions f usuelles. On tracera à chaque fois le second membre f et la solution correspondante u^* sur $[0, 1]$.

Exemple : tester d'abord le programme avec la fonction $f : x \to sin(4\pi x)$ car alors $u^* = -\frac{1}{16\pi^2} f$.

5.2 Avec des conditions de Dirichlet (*Partie facultative=bonus!!!*)

Le problème à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux bords sont maintenant les conditions nulles, aussi appelées conditions aux limites de Dirichlet. Dans ce cas le problème admet une unique solution même si $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$.

Exercice 13 Appliquer le programme `Poisson_periodique` avec en entrée le vecteur

$$4 * [0, f_1, f_2, ..., f_{N-1}, 0, -f_{N-1}, ..., -f_2, -f_1]$$

La solution obtenue s'exprime alors sous la forme

$$u = [0, u_1, u_2, ..., u_{N-1}, 0, -u_{N-1}, ..., -u_2, -u_1]$$

Afficher les N premières coordonnées de ce vecteur dans le cas particulier où $f = 1$. Conclusion?