TD n°3 Théorie de la mesure

Polisano Kévin

12 novembre 2010

Exercice 6

1.
$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^1 \sqrt{f(x)+t^2}dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{\|f\|_\infty + t^2}dx \leqslant \sqrt{\|f\|_\infty + t^2} < +\infty$$

Donc F est définie sur tout $\mathbb{R}$. De plus sur tout compact $[a,b]$: $\sqrt{f(x)+t^2} \leqslant \sqrt{\|f\|_\infty + b}$ intégrable.

On en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Calculons le taux d'accroissement suivant en utilisant la quantité conjuguée :

$$\frac{F(t)-F(0)}{t-0} = \frac{1}{t}\int_0^1 (\sqrt{f(x)+t^2} - \sqrt{f(x)})dx = \frac{1}{t}\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{f(x)+t^2}+\sqrt{f(x)}}dx$$

On fait tendre $t \to 0$ par valeurs positives, on pose $t = \frac{1}{n}$:

$$\frac{F(\frac{1}{n})-F(0)}{\frac{1}{n}} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{f(x)+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{f(x)}}dx$$

On note $f_n(x)$ l'intégrande, majorée par 1 et qui tend simplement vers 0.

Le théorème de convergence dominée montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(\frac{1}{n})-F(0)}{\frac{1}{n}} = 0$$

Par unicité de la limite il vient :

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)-F(0)}{t} = 0}$$

On en conclut que F est dérivable à droite en 0 de dérivée nulle.

Exercice 7

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$$

1. $\forall x \in [0,+\infty[, t \mapsto e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ de dérivée :

$$t \longmapsto -e^{-tx}\sin x = -\Im(e^{-tx}e^{ix}) = -\Im(e^{x(i-t)})$$

De plus $\forall t \in [a,b] \subset]0,+\infty[, \forall x \in [0,+\infty[, e^{-tx}\sin x \leqslant e^{-ax}$ et $x \mapsto e^{-ax}$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'où f dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$f'(t) = -\Im\left(\int_0^{+\infty} e^{x(i-t)}dt\right) = -\Im\left([\frac{e^{x(i-t)}}{i-t}]_0^{+\infty}\right) = \Im\left(\frac{1}{i-t}\right) = \Im\left(\frac{-i-t}{|i-t|^2}\right)$$

$$\boxed{\forall t \in]0,+\infty[, f'(t) = -\frac{1}{1+t^2}}$$

remarque : $|e^{x(i-t)}| = e^{-tx} \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc $e^{x(i-t)} \to 0$.

Posons $f_n(x) = e^{-nx}\frac{\sin x}{x}$. On a :

$$|f_n(x)| \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-x}$$

avec $x \mapsto e^{-x}$ intégrable sur $[0,+\infty[$ et (f_n) converge simplement vers la fonction nulle quand $n \to +\infty$.

D'après le théorème de convergence dominée on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))dx = 0$$

Par unicité de la limite il vient :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0}$$

2. En intégrant on en déduit que : $\forall t > 0, f(t) = -\arctan(t) + C$ et comme : $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$:

$$\boxed{\forall t > 0, f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)}$$

3. La fonction f étant continue sur $[0,+\infty[$ on obtient :

$$\boxed{f(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$$